

# 時空間パターン形成現象に対する 超離散化法を用いた解析

Analysis of spatiotemporal pattern  
formation by ultradiscretization

2016年 2月

早稲田大学大学院 先進理工学研究科

物理学及応用物理学専攻

非平衡系物理学研究

大森祥輔

Shousuke OHMORI

# Contents

<b>1</b>	<b>諸言</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>数学的準備</b>	<b>9</b>
2.1	max-plus 代数の性質 . . . . .	9
2.2	超離散化の方法 . . . . .	12
2.2.1	超離散化の定義 . . . . .	12
2.2.2	超離散化の具体例 . . . . .	15
2.2.3	超離散 Burgers 方程式 . . . . .	20
2.3	tropical 差分化を用いた超離散化の方法 . . . . .	28
2.3.1	tropical 差分化法 . . . . .	28
2.3.2	Langevin 方程式の超離散化 . . . . .	31
<b>3</b>	<b>大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の確率セルオートマトンに基づく考察</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	超離散方程式及び確率関数に基づく確率セルオートマトンモデルの導出 . . . . .	42
3.2.1	非対称局所的相互作用に対する超離散方程式の導出 . . . . .	42
3.2.2	双安定性及びセルオートマトンルール 254 . . . . .	45
3.2.3	大域的相互作用と確率ルール . . . . .	48
3.3	一般化確率セルオートマトンモデルによるパターン形成 . . . . .	49
3.4	確率セルオートマトンモデルから見た大域的相互作用 . . . . .	54
<b>4</b>	<b>反応拡散系における超離散方程式</b>	<b>62</b>
4.1	Introduction . . . . .	62
4.2	連立超離散化方程式 . . . . .	65
4.2.1	連立超離散化方程式の導出 . . . . .	65
4.2.2	状態遷移の議論 . . . . .	66
4.3	セルオートマトンパターン . . . . .	70
4.3.1	セルオートマトンとなるための条件 . . . . .	70
4.3.2	セルオートマトンルール . . . . .	71
4.4	反応拡散モデルと超離散化モデルとの比較 . . . . .	75
<b>5</b>	<b>総括</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>81</b>
	<b>業績</b>	<b>87</b>
	<b>謝辞</b>	<b>90</b>

# Chapter 1

## 諸言

木々の枝分かれから、銀河の構造まで、自然界には様々なパターン現象が存在する [1]-[7]. このような自然界においてみられる時空間パターン現象に関して、非平衡統計力学、非線形動力学の観点から、これまで多くの研究が行われてきた. これらの研究の中で、セルオートマトン (Cellular Automaton) モデル [8]-[12] や反応拡散モデル [13]-[16] の研究も行われ、発展してきた. ここで、現象を記述する微分方程式とセルオートマトンとの関係性、特に同じ現象を記述する非線形微分方程式とセルオートマトンモデルとの関係はどのように特徴づけられるかということは重要な問題である.

例えば、非線形開放系における以下の代表的な反応拡散方程式を考える [17]-[23].

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u - \gamma v + I \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $D_u, D_v, \tau, \gamma, I$  は定数である. 変数  $u, v$  はそれぞれ活性化因子、抑制因子として機能する. ここで  $f(u) = \frac{1}{2} \left( \tanh \frac{u-a}{\delta} + \tanh \frac{a}{\delta} \right) - u$  ( $a, \delta > 0$ ) とし、 $D_u = 1, I = \gamma = 0$  とおくと、Eq.(1.1) はパラメータ  $\tau, D_v$  を変えることで、さまざまなパルスダイナミクスを形成することが知られている. ここで、パルスとは有限の領域のみで値をもつ非一様解のことである. 注意として、通常パルスというとき時間とともに伝搬するものを想像するが、ここでは時間とともに伝搬しない局在解もパルスと呼ぶことにしている. さて、Eq.(1.1) におけるパルス解は、Fig.1.1 のような相図にまとめられる. Fig.1.1 において、点線より右側では局在した振動するドメインが形成され、ドメインの振動にともなって外向きにパルスが輻射される (Fig.1.2). 続いて破線の左側は二つのパルスが衝突によって対消滅を起こす領域である (Fig.1.3(a)). さらに実線、点線、破線で囲まれた領域では、パルスは衝突時に消滅せず、その形を保つ. すなわちソリトン的に振る舞う (Fig.1.3(b)). 実線より上の領域では定常に伝搬するパルスは安定ではない. これは抑制因子  $v$  の拡散定数が大きいことに起因し、パルスの

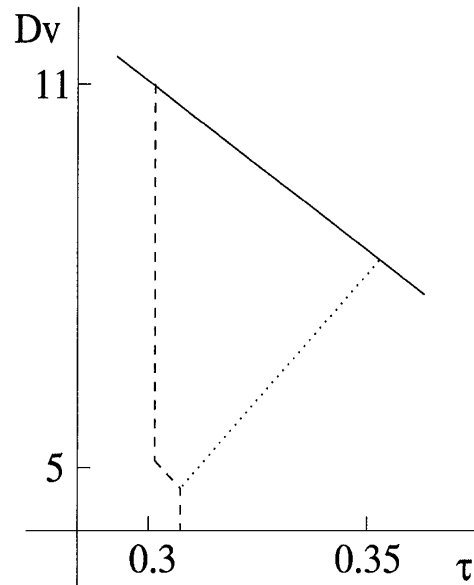


Figure 1.1: Eq.(1.1) における, パラメータ  $D_v$  と  $\tau$  空間での相図 ([20], Fig.6)

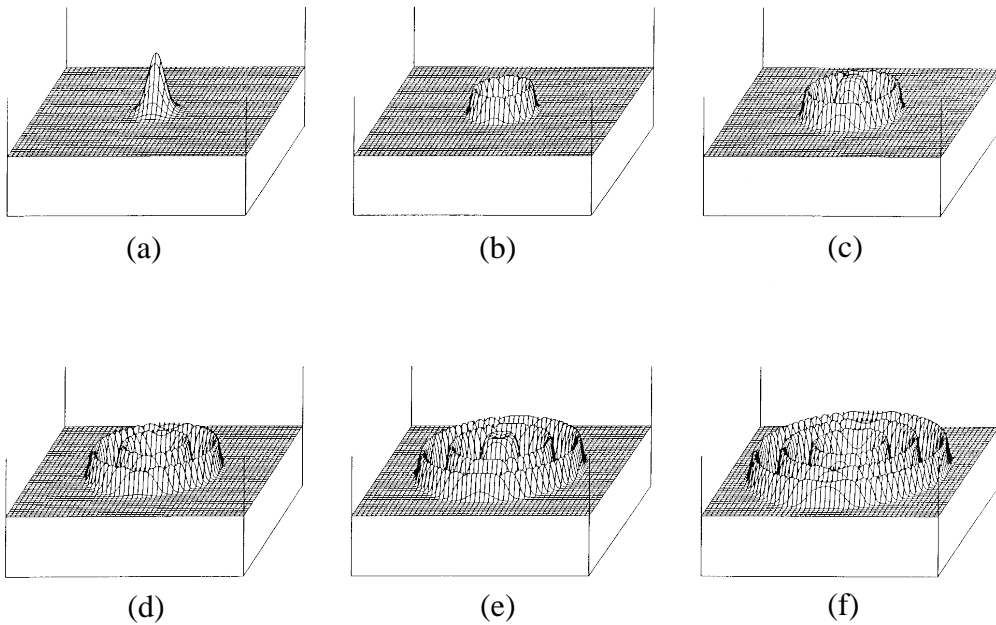


Figure 1.2: Eq.(1.1) における特徴的なパルスダイナミクス. 振動ドメインによるパルスの輻射. (a) から (f) へ時間発展していく. ([18], Fig.6)

運動を阻害するためである. 特記すべきは, 実線部分より上の不安定領域内でみられるパルスの自己複製によって, 安定不安定領域の近傍で, パルスの対消滅, 保存, 自己複製の三つが合わさり, 特徴的な時空パターンが形成されることである (Fig.1.4). これはフラクタル物理学の観点から自己相似構造をもつものの代表例として知られている Sierpinski gasket のパターンに類似している.

また, Eq.(1.1) において  $f(u) = au(1+u)(1-u)$  とおきなおし ( $a > 0$ ), パラメータ  $D_u, D_v, \tau, \gamma, I$  を適当な値にとると, 今度は自己複製と対消滅をもととした Sierpinski

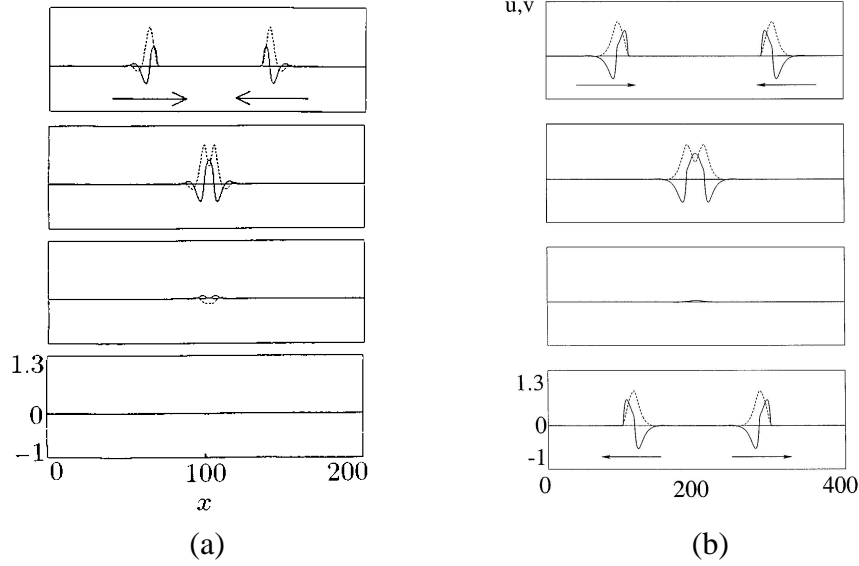


Figure 1.3: Eq.(1.1) における特徴的なパルスダイナミクス. (a) パルスの対消滅. (b) パルスのソリトンの振る舞い. 上から下へ時間発展している. ([20], Fig.1)

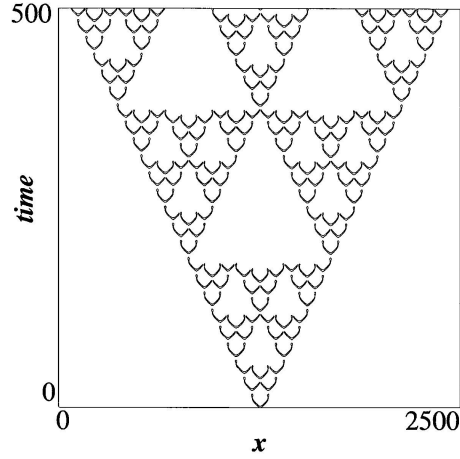


Figure 1.4: Eq.(1.1) による Sierpinski gasket のパターン. 下から上へ時間発展している. ([20], Fig.5)

gasket のパターンが現れる.

一方, この Sierpinski gasket パターンはエレメンタリーセルオートマトン (Elementary Cellular Automaton) を用いても特徴づけることが可能である. 離散時刻  $n$  と差分化された位置  $j$  における変数  $x_j^n \in \{0, 1\}$  に対し, 時間発展方程式を

$$x_j^{n+1} = |x_{j-1}^n - x_{j+1}^n| = \max\{x_{j-1}^n - x_{j+1}^n, x_{j+1}^n - x_{j-1}^n\} \quad (1.2)$$

で定めると, このルールは Sierpinski gasket のパターンを生成する (Fig.1.5).

この Fig.1.5 のパターンは, 縦横の倍率を一定に縮小しても同じ構造が得られることから, 自己相似構造 [24]-[28] になっている. なお, セルオートマトンの定義及び特徴は第 2 章で述べる. また本論文中で示すセルオートマトンの図では全て周期境界条件を課す.

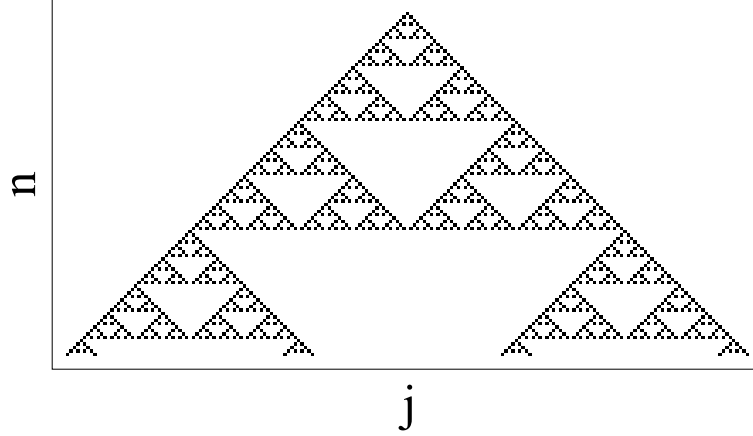


Figure 1.5: エレメンタリーセルオートマトンによる Sierpinski gasket のパターン. 上から下へ時間発展する. 縦 100 ステップ横 200 ステップ (100×200 ステップ). (本論文中のセルオートマトンパターンは全て 1,0 をそれぞれ黒, 白で示している.)

上記の例のように, 非平衡統計力学, 非線形動力学のモデルの中にはセルオートマトンと密接に関係するものが数多く存在する [29][30]. これまで, 現象を記述する方程式とセルオートマトンとの数学的対応づけを可能にする手法として, 超離散化の方法が研究されてきた [31][32]. 超離散化法とは, 元来, 可積分系において確立されたものであり, その起源はソリトン解をもつ Korteweg-de Vries (KdV) 方程式 [33] のような可積分な非線形波動方程式 [34] と, ソリトンの振る舞いをもつセルオートマトンとを直接結び付ける手法として考えられた. 特に初めて超離散化の方法が扱われたソリトンの振る舞いをもつセルオートマトンは箱玉系と呼ばれ, 以下のように特徴付けられている [35]. ある時刻  $n$  で一次元の無限格子列が与えられているとしよう. 各格子は 0 または 1 の値をもつとする. すなわち  $b_j^n$  を位置  $j$  での格子の状態だとすると,  $b_j^n \in \{0, 1\}$  である. このとき, 次の時刻  $n+1$  の状態を決めるルールを次のように定める.

$$b_j^{n+1} = \min(1 - b_j^n, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (b_i^n - b_i^{n+1})) \quad (1.3)$$

Eq.(1.3) は次の (1) から (3) の手続きとして解釈することができる. (1) 左から右へ格子の状態を見ていくとする. もし状態 1 の格子があったとすると, それを最も近い右側の 0 の格子と取り換える. (したがって  $b_j^n = 1$  ならば  $b_j^{n+1} = 0$  である.) (2) (1) の取り換えは一回のみ行われる. (すなわち, 1 をもつ二つの格子は必ず別々の 0 の格子と取り換わる.) (3) 1 の状態をもつ格子すべてに対して, (1), (2) を繰り返す. このルールによるセルオートマトンの時間発展を表したのが Fig.1.6 である. Fig.1.6 からわかるように, Eq.(1.3) のルールに従うダイナミクスは, 各時刻で 1 の数が保存しているので可積分なセルオートマトンであり, もしある時刻で 1 が連続して並んでい

る状態, 例えば Fig.1.6 では 1111, 11, 1 なる状態同士が衝突しても, その後 1 が連続して並んでいる元の状態が再現するという意味でソリトンの振る舞いを示す.

```

001111000011010000000000000000
000000111100101100000000000000
000000000011010011110000000000
000000000000101100001111000000
00000000000001001100000011110

```

Figure 1.6: Eq.(1.3) の時間発展の一例. 上から下へ時間発展している.

一方で, KdV 方程式のソリトンの性質を壊さない差分方程式 (Lotka-Volterra 差分方程式)

$$\frac{u_j^{n+1}}{u_j^n} = \frac{1 + \delta u_{j-1}^n}{1 + \delta u_{j+1}^{n+1}} \quad (1.4)$$

も提案されている [36][37]. ここで  $\delta$  は定数で,  $j, n \in \mathbf{Z}$  ( $\mathbf{Z}$  は整数全体の集合) である. そして共にソリトンの振る舞いを示す Eq.(1.3) と Eq.(1.4) を直接関係づける方法が超離散化である. 具体的な計算過程などの詳細はここでは省略するが [31], Eq.(1.4) から超離散 Lotka-Volterra 方程式と呼ばれる次の方程式 (1.5) を導出することが可能であり, この方程式が Eq.(1.3) を変数変換を通して対応づく (Fig.1.7).

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0, U_{j-1}^n - 1) - \max(0, U_{j+1}^{n+1} - 1) \quad (1.5)$$

このように, 超離散化の方法によって, 現象を記述する方程式と, その現象の特徴に類似した性質を示すセルオートマトンとの関係性をより明確にすることができる.

超離散化の方法は上記のような可積分系において主に研究されてきたものであるが, 近年この方法を非可積分系へ適用する研究が行われつつある [38]-[41]. 本論文では, 超離散化法の非平衡, 非線形系への適応範囲の拡張, 特にパターン形成との対応付けを行うことを目的とする. 具体的には, 粘着テープ剥離実験においてみられるパターン形成に対する超離散化の適用法, 及び Eq.(1.1) などの反応拡散系に対する超離散化法の適用を述べる. 最終的には, 超離散化法なる数学的手法を通してパターン形成現象を新たな観点から解明することを目的とする.

ここで, 本論文の構成を説明する. まず第 2 章で超離散化法の一般論を略説する. ここでは, 非平衡統計力学, 非線形動力学への適用を念頭に超離散方程式とセルオートマトンとの対応について重点的に説明する. 章の終わりに tropical 差分化を用い

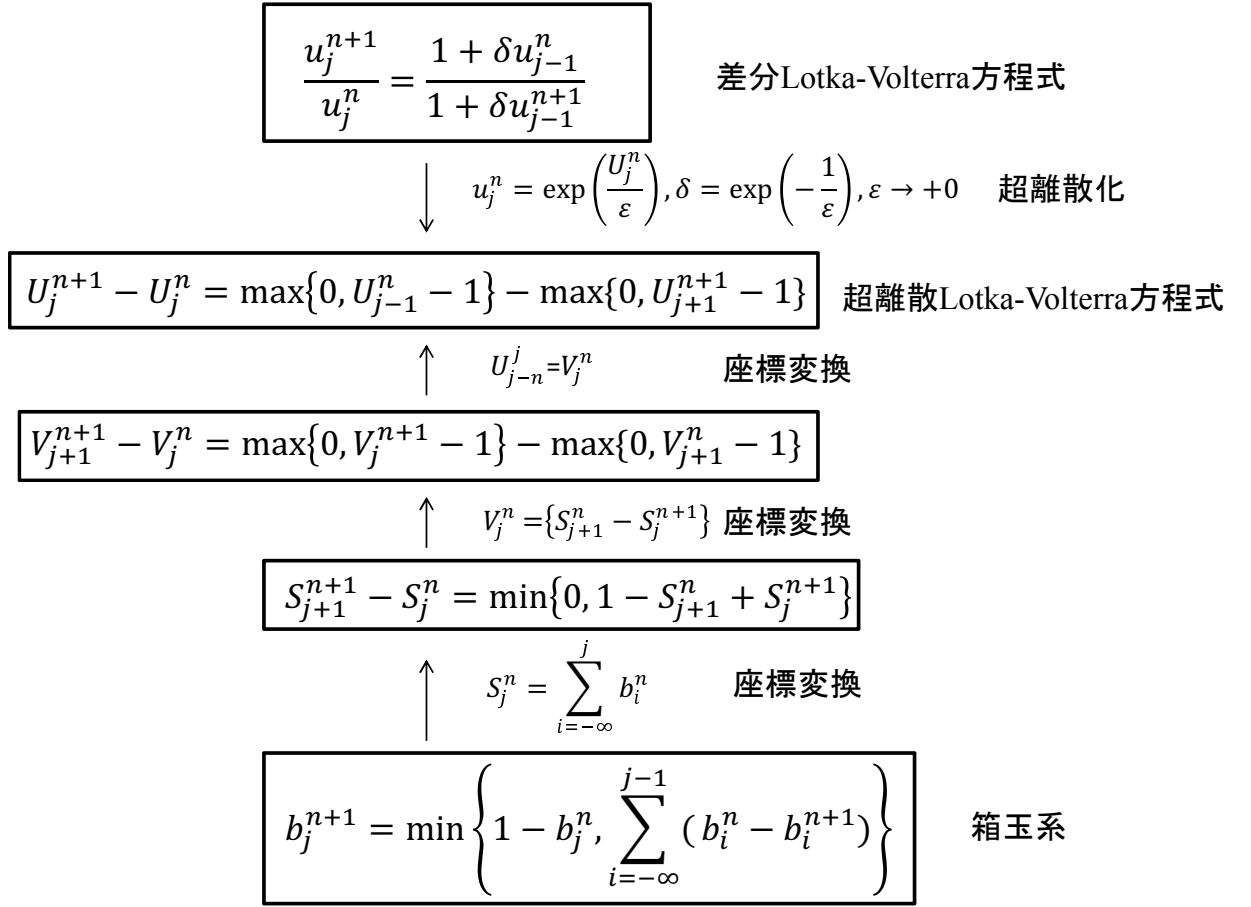


Figure 1.7: Eq.(1.3) と Eq.(1.4) とを結びつける図式 ([32], 図 6.16)

た超離散化法を説明する。第3章では、本論文の目的である超離散化法によるパターン形成現象の解析の一例として、粘着テープ剥離実験を再現する大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の力学系モデルに対して超離散化法を適応し、確率セルオートマトンモデルを導出する。この確率セルオートマトンを考察することにより、既に発見的に得られていたセルオートマトンモデルと力学系モデルとの関連性を理論的立場から示すとともに、大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団のダイナミクスの新たな性格について述べる。実際に、確率セルオートマトンモデルにおいては、大域的相互作用の効果がこのパターン形成ダイナミクスの本質であると考えられることができる。第4章では、Eq.(1.1) のような反応拡散系に対して、超離散化の立場からセルオートマトン解の導出を試みる。具体的には反応拡散方程式に超離散化を適用して得られる超離散方程式について、ある離散時刻  $n$  から  $n+1$  へ状態がどのように変化するかを数学的立場から議論する。次にこの超離散方程式がセルオートマトンに変換可能である条件を、状態遷移の議論をもとに導出



する. そして, この超離散方程式の解をセルオートマトンを用いて表現し, もとの方程式に見られる解の特徴と比較検討する. 最後に全体のまとめを行う.

## Chapter 2

# 数学的準備

この章では、後の章で必要となる超離散化の方法について非平衡統計力学、非線形動力学への適用、特にセルオートマトンとの対応関係を念頭に説明する。章の後半では tropical 差分化を用いた超離散化法を説明する。超離散化法を簡単に述べると、与えられた微分方程式を適当に差分化し、max-plus を代数構造とした方程式へ変換する極限操作のことである。この操作によって得られる方程式を超離散化方程式、または超離散方程式といい、超離散化方程式の解は、ある場合にはセルオートマトンとして直接記述される。超離散化方程式はその代数構造が max-plus で作られているため、まずは max-plus 代数構造 [42] の性質から説明を始める。

### 2.1 max-plus 代数の性質

はじめに “max” なる記号の定義を行う。

[定義] 添え字集合を  $\Lambda$  とした集合族  $X_\lambda$  に対して、直積を

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{\varphi : \Lambda \rightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi(\lambda) \in X_\lambda\} \quad (2.1)$$

で定義する。選択公理から、各  $X_\lambda \neq \emptyset$  ならば直積は  $\emptyset$  ではない。

[定義] 今  $\Lambda = \{\alpha, \beta\}$ , 各  $X_\lambda \equiv X$  とする。  $R_o$  が  $X$  上の順序関係であるとは、直積の部分集合  $R_o \subset \prod_{\lambda \in \{\alpha, \beta\}} X_\lambda (\equiv X)$  であり、その要素  $\varphi$  が以下の i), ii), iii) を満たすものの全体をいう。

- i)  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$  なる  $\varphi$  は  $R_o$  の要素である。
- ii)  $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$  なる  $\varphi$  が  $R_o$  の要素ならば、  $\varphi'(\alpha) = \varphi(\beta), \varphi'(\beta) = \varphi(\alpha)$  なる  $\varphi'$  は  $R_o$  の要素ではない。

iii)  $R_o$  の要素  $\varphi, \varphi'$  に関して, もし異なる  $\lambda$  に対して  $\varphi$  と  $\varphi'$  の値が一致するならば, 一致した値をその  $\beta$ -値とする写像の  $\alpha$ -値を, その  $\alpha$ -値, また一致した値をその  $\alpha$ -値とする写像の  $\beta$ -値を, その  $\beta$ -値とするような写像  $\varphi''$  は  $R_o$  の要素である.

いま  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  なる  $\varphi$  を, 順序という記号  $\preceq$  を導入して  $a \preceq b$  と書こう. 上記の i), ii), iii) に対して記号  $\preceq$  を用いると,

$$i) a \preceq a, \quad ii) a \preceq b, b \preceq a \rightarrow a = b, \quad iii) a \preceq b, b \preceq c \rightarrow a \preceq c$$

となる. 実数間の  $\leq$  は実数集合  $\mathbf{R}^1$  における順序関係である. また, 実数集合において,  $a \succ b \equiv a \leq b$  として定義した  $\succ$  も順序関係である.

[定義] 集合  $X$  上に順序関係  $R_o$  が定められているとし, その順序記号を  $\leq$  とする. 写像 (演算)  $\max : \Pi_{\lambda \in \{\alpha, \beta\}} X_\lambda (\equiv X) \rightarrow X, \varphi \mapsto \max(\varphi)$  を

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases} \quad (2.2)$$

と定める. もし  $a, b$  が比較可能でない場合は  $\max\{a, b\} \equiv a$  として定義する. ただし  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  であり  $\max(\varphi)$  を  $\max\{a, b\}$  とした. このとき  $X (= (X, R_o))$  は (順序  $\leq$  において) 算法  $\max$  をもつ代数系, または  $\max$ -系という. 例えば実数集合  $\mathbf{R}^1$  は  $\max$  をもつ代数系である. 以下では, 基本的に全順序集合を考えることにする.

$\max$  演算について, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} \max\{a, b\} &= \max\{b, a\} \\ \max\{\max\{a, b\}, c\} &= \max\{a, \max\{b, c\}\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

証明は  $\max$  の定義から明らかである. Eq.(2.3) は,  $\max$  演算が交換法則, 結合法則を満たしていることを意味する. ここで, さらに演算  $+$  を導入する.  $+$  に対しても交換法則  $a + b = b + a$ , 及び, 結合法則  $a + (b + c) = (a + b) + c$  が成立する. また, 実数上での和積に関する分配法則に対応して,

$$a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\} \quad (2.4)$$

が成立する. これも明らかである. 以下では, 実数上に話を限ることにする. 他の  $\max$ -plus 代数の性質として

$$\begin{aligned} \max\{a, b\} + \max\{c, d\} &= \max\{a + c, a + d, b + c, b + d\} \\ x \geq 0 &\Rightarrow x \max\{a, b\} = \max\{xa, xb\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

が成立する. 実際, Eq.(2.5) の第一式を示してみよう. もし  $a \leq b$  とすると,  $\max\{a, b\} = b$  だから  $\max\{a, b\} + \max\{c, d\} = b + \max\{c, d\} = \max\{b + c, b + d\} = \max\{a + c, a + d, b + c, b + d\}$ . ここで Eq.(2.4) と  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, a + d \leq b + d$  を用いた.  $b \leq a$  の場合も同様である. Eq.(2.5) の第二式目は明らかである.

次に  $\max$  演算をもつ代数系と群との一般的な関係を見る. 後に, 与えられた微分方程式を差分化して超離散化できるかどうかの議論を行うが, その際に現れる負の項の問題は, この  $\max$  演算と群との関係が基となっている.

まず, Eq.(2.3) から  $\max$  をもつ代数系  $X$  は可換半群になっていることに注意しよう. ここに, 演算  $\alpha$  に対して  $\alpha$  をもつ代数系  $X$  が半群であるとは,  $\alpha$  が結合的であることをいうのであり, さらに  $\alpha$  が可換のときすなわち交換法則が成立するとき, 可換半群という. 統計力学における半群の例としてよく用いられるのは, 臨界現象を解析する際の手法である繰り込み群  $\mathcal{R}$  である [43][44]. さて, この  $\max$  をもつ代数系に対し単位元について考えよう. ここで  $\alpha$  をもつ代数系  $X$  の中の元  $x_0$  が単位元とは

$$x\alpha x_0 = x_0\alpha x = x \quad (2.6)$$

を任意の  $x \in X$  に対して満たすことである. 今, 全順序構造が入った集合  $X$  に対し,  $X$  の最小限  $m = \min X$  が存在するとしよう. 例えば補完実数直線  $\bar{\mathbf{R}}$  はそのような集合である [45][46]. すると任意の  $x \in X$  に対して

$$\max\{x, m\} = \max\{m, x\} = x \quad (2.7)$$

となり,  $m$  は  $X$  の単位元である. したがって単位可換群となる  $\max$  をもつ代数系は存在する. すなわち次が成立する.

単位元をもつ  $\max$ -系が存在する

注意として実数集合  $\mathbf{R}^1$  には  $\max$  演算における単位元が存在しない. しかしながら, 単位可換群となる  $\max$ -系にたいして, 逆元を考えると, 唯一最小限にのみ逆元が存在することがわかる. まず  $\alpha$  をもつ代数系  $X$  において,  $x \in X$  の逆元  $y$  とは

$$x\alpha y = y\alpha x = x_0 \quad (2.8)$$

を満たす元のことである. ここで  $x_0$  は  $X$  の単位元である. 任意の  $x \in X$  に対して逆元が存在するとき,  $\alpha$ -系には逆元が存在するという. さて, 単位可換群となる  $\max$ -系  $X$  を考えよう. Eq.(2.7) から最小限  $m$  が  $X$  の単位元である. 今  $x \in X$  を考えると

$$\max\{x, y\} = \max\{y, x\} = m \quad (2.9)$$

なる  $y$  は  $x = m$  のとき以外は存在しない. したがって次が示された.

max-系には逆元が存在しない

注意として、実数直線  $\mathbf{R}^1$  を max-系とみたとき、そもそも単位元が存在しないので、逆元は定義できない。上の事実は補完実数直線などの単位可換群となる max-系においてさえ単位元以外の元に対する逆元は存在しないことを示している。これらの事実から、max-系は群とはならないことが導かれた。

一般的に、微分方程式は実数直線上の四則演算を基に構成されているため、その代数構造において群となるが、超離散化された後の方程式は max-plus 代数構造を持ち、上記のように群とはならない。したがって、与えられた方程式を超離散方程式へ変換する際、この代数構造の違いが基となって、超離散化へ変換できない事がある。これらの問題は、非平衡、非線形系へ超離散化を適用する際に大きな障害となっている。実際、問題にしている微分方程式が非可積分系であるものが多く、従来通りの超離散化ができないものが多い。本論文で扱う方程式も、非可積分系である。これらの問題に対して、技巧的に解決する糸口の一つが、後の節で述べる tropical 差分化を用いた超離散化の方法である。この方法の解説の前に、次節では、まず超離散化法の基本原理について述べる。なお、ここで述べた max-系、及び、次節で述べる超離散化の方法は、数学的には超準解析の一応用となる。詳しい議論は、参考文献 [47] を参考されたい。

## 2.2 超離散化の方法

この節では超離散化法の手順を述べ、簡単な微分方程式に対して超離散方程式を導出する。さらに、超離散化法に関わる先行研究として、Burgers 方程式に対する超離散化法の研究についても説明する。本来、数学的に超離散化法は、超準解析などの数学基礎論に基づいて議論される [47]。また物理へ応用する際も、差分方程式論 [48][49] や可積分系 [50]-[52]、tropical 幾何学 [53][54] との関係性に関する研究が多い。ここでは、後の章に向けての準備として、与えられた微分方程式から超離散化方程式を得る技法、及び、その際に現れる問題を簡単に述べるにとどめる。

### 2.2.1 超離散化の定義

まず、超離散化を行う際に基本となる次の極限公式を証明しよう。ただし、 $\varepsilon, A, B > 0, a, b \in \mathbf{R}^1$  としている。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(Ae^{a/\varepsilon} + Be^{b/\varepsilon}) = \max\{a, b\} \quad (2.10)$$

注意として,  $A, B \leq 0$  のときは,  $\log 0$  は定義されず, また, 例えば  $A = 0$  かつ  $B \neq 0$  のときは, Eq.(2.10) の左辺は  $a, b$  の大小に依らず  $b$  となる. したがって,  $A \neq 0$  かつ  $B \neq 0$  としている. また  $A, B$  の一方が負の場合は, 後に見るように困難が生じる.

Eq.(2.10) を証明しよう. 実際,  $a > b$  のとき, Eq.(2.10) の左辺は  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \frac{A}{B} e^{a/\varepsilon} (1 + \frac{B}{A} e^{(b-a)/\varepsilon}) = a + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(1 + \frac{B}{A} e^{(b-a)/\varepsilon}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \frac{A}{B} = a$  となり, まったく同様に  $a < b$  の場合も示される.  $a = b$  のときは, 左辺  $= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(\frac{A}{B} + 1) e^{a/\varepsilon} = a + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(\frac{A}{B} + 1) = a$  となる. 以上より示された.

一般には  $A = B = 1$  を考えることが多く,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{a_1/\varepsilon} + e^{a_2/\varepsilon} + \dots) = \max\{a_1, a_2, \dots\} \quad (2.11)$$

が成立する. 例えば,  $\varepsilon > 0$  に対して  $e^{a/\varepsilon} + e^{b/\varepsilon} = e^{c/\varepsilon}$  なる方程式を考えると,  $c = \varepsilon \log(e^{a/\varepsilon} + e^{b/\varepsilon})$ . したがって  $\varepsilon \rightarrow +0$  の極限を取れば  $c = \max\{a, b\}$  を得る. ここで,  $x = e^{a/\varepsilon}, y = e^{b/\varepsilon}, z = e^{c/\varepsilon}$  とおく. このとき,  $x, y, z > 0$  となることに注意する. すると和の方程式  $x + y = z$  から極限操作として  $\max$  の方程式  $\max\{a, b\} = c$  に移行できることが分かった. まったく同様に考えることで,  $xy = z$  が  $a + b = c$  へ,  $x/y = z$  が  $a - b = c$  へ移行できる. では  $x - y = z$  について考えてみよう. このとき

$$\varepsilon \log(e^{a/\varepsilon} - e^{b/\varepsilon}) = c \quad (2.12)$$

となるが,  $a = b$  の場合は  $-\infty$  へ発散し,  $a < b$  の場合は  $\log$  の変数が負になる. すなわち, 極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  をとる以前の段階で問題が生じる. そもそもこの問題では, 上で注意した  $x, y, z > 0$  を満たしていない. 関数  $e^x$  の  $\mathbf{R}^1$  から正数への単調増加性より,  $a < b$  ならば  $x < y$  である. したがって  $x - y = z$  なる  $z$  は負となり, そもそも  $e^c$  を  $z$  で置き換えることができない. 同様なことが  $a = b$  についてもいえる. 結果的に, 公式 Eq.(2.11) は一般的に適用できない. ここで, 常に  $a > b$  となるときの, Eq.(2.10) の証明と同様な証明によって Eq.(2.12) は  $\varepsilon \rightarrow +0$  で  $c = \max\{a, b\}$  となる.

この問題は負の問題と言われ, 方程式を超離散化しようとする際に障害となる. また, 負の問題は, 前節でみた  $\max$ -系には逆元が存在しないという事実と密接な関係がある. 実際に, 公式 Eq.(2.10) は  $+$  を  $\max$  に対応させるが,  $+$  の逆元である  $-$  に対して (すなわち  $a \in \mathbf{R}^1$  の逆元  $a + (-a) = (-a) + a = 0$  として  $-$  を定義した)  $\max$  の逆元に対応させることは, 一般に逆元が存在しないから不可能となる.

さて, 超離散化の極限公式 (2.10) において,  $\varepsilon \rightarrow +0$  で両辺が等しくなる様子をグラフで見てみよう [32].  $A = B = 1, b = 4$  として,  $f(x) = \varepsilon \log(e^{x/\varepsilon} + e^{4/\varepsilon})$  のグラフ

を Fig.2.1 に描いた. 比較のため,  $\max(x, 4)$  のグラフを点線で記してある. グラフから,  $\varepsilon$  を小さくしていくと  $f(x)$  が急激に  $\max(x, 4)$  へ近づくことがわかる.

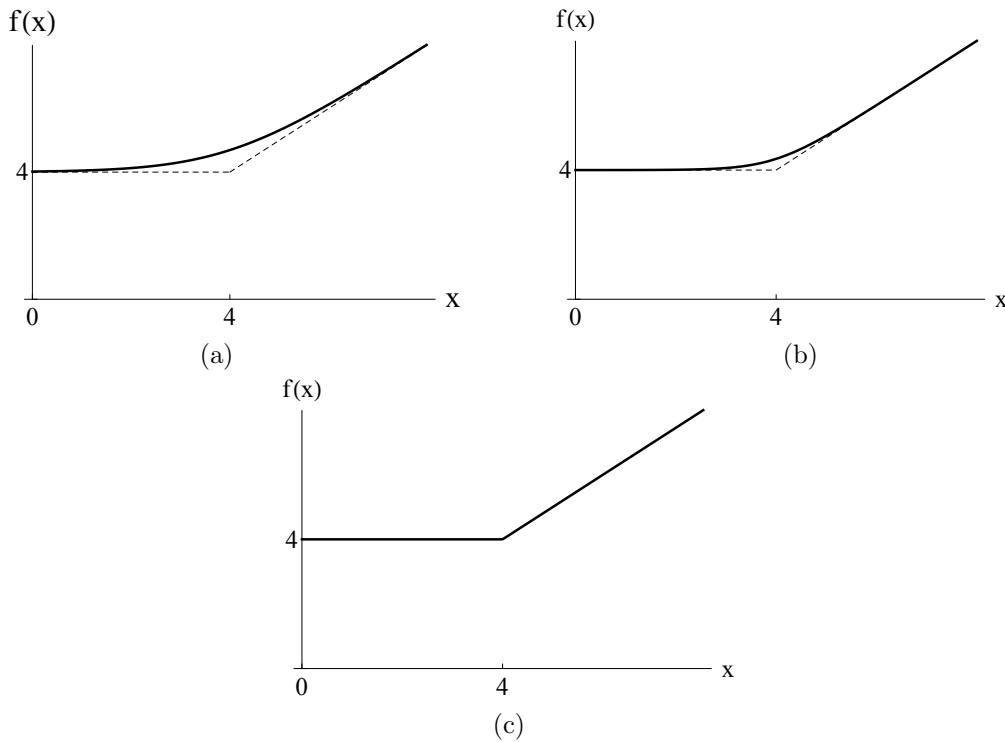


Figure 2.1:  $f(x) = \varepsilon \log(e^{x/\varepsilon} + e^{4/\varepsilon})$  のグラフ, (a)  $\varepsilon = 1$ , (b)  $\varepsilon = 0.5$ , (c)  $\varepsilon = 0.01$ . ([32], 図 4.1. 参考)

ここで, 超離散化の具体例に移る前に, セルオートマトンについてその定義を確認しておこう [10]-[12]. セルオートマトンとは, 複雑な自然現象を取り扱うための数学的モデルとして, 特に複雑系科学の分野で考えられてきた. このモデルでは, 独立変数 (例えば, 時刻, 位置) 及び従属変数が全て離散値, すなわち整数値を取る. ただし, 従属変数の値域は有限集合に限る. そして, 従属変数の値は, 同じルールに従って独立変数が変わるたびに同期的に決定され形成されていく. 特に, 独立変数として時刻  $n$ , 位置  $j$  を取ったとき, 時刻  $n$  の位置  $j$  での従属変数の値は,  $n-1$  での  $j$  での従属変数の値及び  $j$  の近傍での値に依存する. すなわち各従属変数の状態は局所的相互作用を受けていると考えることができる. 以上の話を, 数式を用いて表す.

今, 一次元セルオートマトンとして,  $a_j^n$  を離散時刻  $n$ , 離散位置  $j$  を変数としたセルの状態 (従属変数) としよう. このとき  $\Omega \subset \mathbf{Z}$  なる有限集合  $\Omega$  に対して  $a_j^n \in \Omega$  と

なっている. また  $a_j^n$  の時間発展は

$$a_j^n = F(a_{j-r}^{n-1}, a_{j-r+1}^{n-1}, \dots, a_j^{n-1}, \dots, a_{j+r}^{n-1}) \quad (2.13)$$

によって記述されるものとしよう. ここで, 写像  $F: \Omega^{2r+1} \rightarrow \Omega$  がセルオートマトンを特徴づけるルールに対応し,  $r \in \mathbf{N}$  ( $\mathbf{N}$  は自然数全体の集合) なる定数がルールの及ぶ範囲に対応する. すなわち, 状態変数  $a_j^n$  は多くとも  $2r+1$  個の近傍系の時刻  $n-1$  でのセルの値に依存している.  $F$  の例として, 例えば  $F(a_{j-r}^{n-1}, a_{j-r+1}^{n-1}, \dots, a_j^{n-1}, \dots, a_{j+r}^{n-1}) = a_{j-r}^{n-1} \times a_{j-r+1}^{n-1} \times \dots \times a_{j+r}^{n-1}$ ,  $\Omega = \{-1, 0, 1\}$  をとれば, これは Eq.(2.13) を満たす. 特に,  $\Omega = \{0, 1\}$ ,  $r = 1$  であるセルオートマトン (2.13) をエレメンタリーセルオートマトン (Elementary Cellular Automaton) と呼ぶ.

またセルオートマトン (2.13) において,  $\Omega = 0, \dots, k-1$  とすると, ルール  $F$  の「ルール番号」  $R_F$  というものを以下のように導入することができる.

$$R_F = \sum_{\{a_{j-r}, a_{j+r}\}} F(a_{j-r}^{n-1}, a_{j-r+1}^{n-1}, \dots, a_j^{n-1}, \dots, a_{j+r}^{n-1}) k^{\sum_{l=-r}^r k^{r-l} a_{j+l}} \quad (2.14)$$

例えば, 第1章でみた Eq.(1.2) の形, すなわち  $F(a_{j-1}^n, a_j^n, a_{j+1}^n) = \max\{a_{j+1}^{n-1} - a_{j-1}^{n-1}, a_{j-1}^{n-1} - a_{j+1}^{n-1}\}$  なるエレメンタリーセルオートマトンを考えると,  $R_F = 90$  となる. したがって, このセルオートマトンはルール番号 90 であり, Fig.1.5 なる Sierpinski gasket の時間発展を生む.

エレメンタリーセルオートマトンでは全ルールはルール 0 から 255 までの  $2^8 = 256$  個しかない. そして, それらは大きく分けて以下の四つの場合に分類できる (Fig.2.2).

- (1) 全て 0 または 1 の一様なパターンに落ち着く.
- (2) 0 の領域と 1 の領域が分離した定常 (周期) パターンに落ち着く.
- (3) 三角形パターンがカオス的に生成消滅しながら時間発展し続ける.
- (4) 周期パターンとランダムなパターンが混在し 0 と 1 が複雑な挙動を示す.

Fig.2.2 において, (a) から (d) がそれぞれ (1) から (4) のパターンの例を示している. またこの分類は任意の初期値に対して完全な分類を与えるわけではなく, 分類問題も含め, セルオートマトン自身の研究は今なお行われている.

### 2.2.2 超離散化の具体例

次に, 具体的に簡単な方程式に対する超離散化を行う.



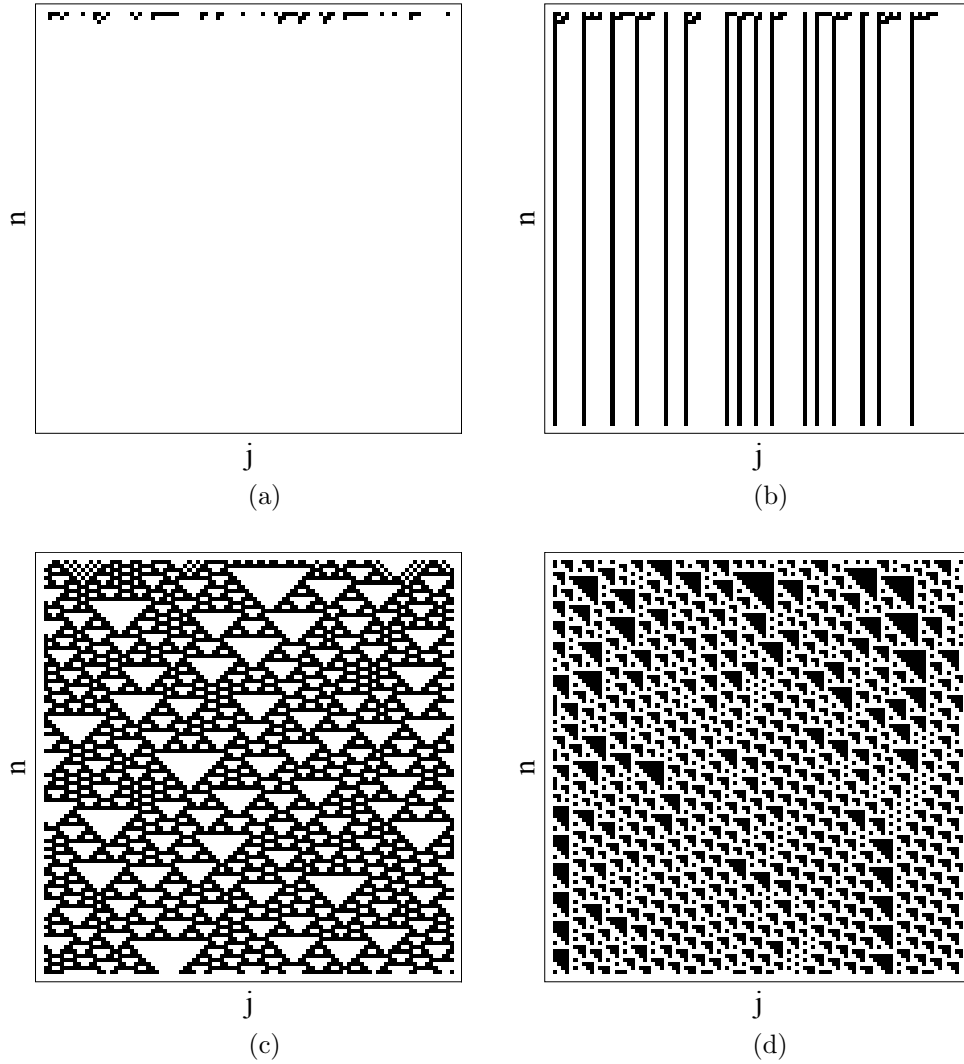


Figure 2.2: エレメンタリーセルオートマトンの四つの分類の例. (a) ルール番号 40 のパターン. (1) の場合に対応している. (b) ルール番号 44 のパターン. (2) の場合に対応している. (c) ルール番号 122 のパターン. (3) の場合に対応している. (d) ルール番号 193 のパターン. (4) の場合に対応している. 時間発展は上から下へと発展している. (それぞれ  $100 \times 100$  ステップ.)

ex.1: まずはじめに, 一階の微分方程式

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad (u(0) = 1, \lambda > 0) \quad (2.15)$$

を考えよう. 方程式の解は  $u = e^{\lambda t}$  となり, グラフは  $\lambda$  を大きくしていくと,  $t \rightarrow \infty$  でより速く発散する. ここで, Eq.(2.15) を前方差分化すると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda u_j^n \quad (2.16)$$

となり,

$$u^{n+1} = (1 + \alpha)u^n \quad (2.17)$$

を得る. ただし  $\alpha = \lambda \Delta t$  ( $\alpha > 0$ ) とした. Eq.(2.17) は負の項がないため, 変数変換

$$u^n = e^{U^n/\varepsilon}, \quad \alpha + 1 = e^{A/\varepsilon} \quad (2.18)$$

を行うと, Eq.(2.15) に対する超離散方程式

$$U^{n+1} = A + U^n \quad (2.19)$$

を得る. 初期条件  $U^0 = a$  とすれば, 解は  $U^n = a + nA$  となる. グラフにすると, 傾き  $A$  の一次関数となる. ここで,  $A = \varepsilon \log(\lambda \Delta t + 1)$  であるから,  $\lambda$  を大きくしていくと傾きが増大する. この結果は, 元の Eq.(2.15) の解の性質に類似している. 異なる点としては, 超離散方程式 Eq.(2.19) の解は線形である. このことから, 超離散化によって与えられた方程式を区分線形化していることがわかる (Fig.2.1).

さて, 今行った議論は, 非平衡緩和過程のもっとも簡単な場合に関連付けることができる [55][56]. 今, 古典的な量  $x$  のはじめに与えられた値の下での不完全平衡の成立の緩和時間が,  $x$  自身の平衡値 (平均値) の成立の緩和時間に比べてはるかに短いとする. すなわち,  $x$  の平均的な揺らぎ  $\langle x^2 \rangle^{1/2}$  を大きく上回るある値を与えると, それにより不完全平衡のある一定状態を特徴づけることができるとする. このような量の揺らぎは準定常的な揺らぎといわれる. さらに非平衡系の状態が, 各時刻において  $x$  の値だけで完全に決まるものとする. さて, このような仮定のもと, 時刻  $t$  で  $x$  が平衡から (少し) ずれているとすると (しかしながら平均的ゆらぎに比べて  $x$  は大きい値をもつ), 続く時刻では物体は平衡の状態へ戻ろうとし, それに応じて量  $x$  は減少する. このとき, 仮定によって各時刻の  $x$  の速度変化は  $x$  のみに依存する:  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}(x)$ .  $x$  が減少するため,  $\frac{dx}{dt}(x)$  を  $x$  の幂で展開して一次の項だけ残すものとする, と,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x \quad (\tau > 0) \quad (2.20)$$

を得る. ここで, 0 次項は, 完全な平衡状態  $x = 0$  で速度が 0 となることを仮定して 0 とした. Eq.(2.20) は非平衡系の緩和過程を記述するもっとも簡単な運動方程式である. ここで,  $\tau$  は完全な平衡の成立に対する緩和時間の大きさを決めるパラメータである. この方程式の解は  $u \sim e^{-\frac{t}{\tau}}$  であり, 緩和時間が大きくなると ( $\tau \rightarrow \infty$ )  $x$  は緩やかに減少して系は平衡に近づき, また, 緩和時間が短い ( $\tau \rightarrow 0$ ) ときは, 速やかに系は平衡に近づく. この Eq.(2.20) に対する超離散方程式の導出は, Eq.(2.15) から Eq.(2.19) の導出過程を繰り返せばよい. 注意として, Eq.(2.20) を差分化した方程式は  $x^{n+1} = (1 - \beta)x^n$ ,  $\beta = \Delta t/\tau$  ( $\beta > 0$ ) となり負の項をもつが, これは変数変換  $1 - \beta = e^{B/\varepsilon}$  ( $1 - \beta > 0$ ),  $x^n = e^{X^n/\varepsilon}$  によって超離散化の際に影響しない. したがっ

て超離散方程式

$$X^{n+1} = B + X^n \quad (2.21)$$

を得る. この方程式の解は初期条件  $X^0 = b$  として  $X^n = b + nB$  となる. これもまた一次関数となるが,  $1 - \beta < 1$  から  $B < 0$  である. すなわち, 緩和時間  $\tau$  の大小によって傾きが変化する. しかし, この超離散系は, 元の微分系における物理的描写と以下の点で異なる. 一点目は, 超離散化して考えることは区分線形して考えることであるということからもわかるように, もとの方程式 Eq.(2.20) の解に見られた緩やかな緩和, 急激な緩和ということが表現できない. これは指数関数  $e^{-x}$  によるものだが, 例えば緩和時間  $\tau$  が大きいとき, 平衡点から少しずれた  $x$  は, 大きくずれた  $x$  に比べて平衡点への向かい方がよりゆっくりとなる ( $x$  の時間変化割合がゆっくりとなる). 一方, 線形化されてしまえば,  $\tau$  が与えられれば平衡点からずれた  $x$  は皆同じ時間変化の割合で平衡に向かう. 二点目は, 超離散方程式の解  $X^n = b + nB$  は傾き  $B$  が負なので, もし初期値  $b > 0$  としても, ある有限時刻  $n_0 < \infty$  で  $X^{n_0} \leq 0$  となってしまう. これは, 時間発展によって  $x$  が漸近的に 0 に近づくことを全く表現できない. このように, 非平衡緩和過程を少なくとも前方差分化 Eq.(2.16) に基づいた超離散化を通して表現すると, ダイナミクスを簡略化して (線形化して) 見ることになり, 忠実に再現できるわけではないことに注意する. なお, 次節の ex.3 にて, 上記の議論をより一般化した非平衡緩和過程に対する超離散化系を tropical 差分化を用いて説明する.

ex.2: 次に, 一次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.22)$$

についての超離散方程式を考えよう. Eq.(2.22) の差分化を

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.23)$$

とする. これを変形すると

$$u_j^{n+1} = \alpha(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2\alpha)u_j^n \quad (2.24)$$

となる. ただし  $\alpha = (D\Delta t)/(\Delta x)^2$  とおいた. 変数変換

$$u_j^n = \alpha^n e^{U_j^n/\varepsilon}, (1 - 2\alpha)/\alpha = e^{A/\varepsilon} \quad (2.25)$$

を Eq.(2.24) に適用し, 超離散化極限公式 Eq.(2.10) を用いれば, 拡散方程式 Eq.(2.22) に対する超離散拡散方程式として

$$U_j^{n+1} = \max\{U_{j+1}^n, U_{j-1}^n, U_j^n + A\} \quad (2.26)$$

を得る. さて, 超離散拡散方程式は, 元の拡散微分方程式でみられる線形性に対応する性質をもつことが知られている. 今,  $V_j^n, W_j^n$  を Eq.(2.26) の解としよう. すると,  $F_j^n = \max\{V_j^n, W_j^n\}$  なる  $F_j^n$  もまた Eq.(2.26) の解となることが示される. これは,  $\max$  演算がもとの方程式の+に対応するという事実から, 超離散方程式の解の重ね合わせを表している. また,  $B$  を定数として,  $F_j^n = V_j^n + B$  なる  $F_j^n$  も解となる. これは, 元の方程式の解を定数倍したものもまた解になるという性質を超離散方程式で表したものである. 続いて, 超離散拡散方程式とセルオートマトンとの関係性を見てみよう.  $A \leq 0$  を仮定して,  $U_j^0$  なる Eq.(2.26) の初期値を  $U_j^0 \in \{0, 1, \dots, l\}, j = 1, \dots, N$  とする.  $A \leq 0$  から  $U_j^n + A \leq U_j^n$  に注意すれば, 任意の位置  $j = 1, \dots, N$  に対して,  $U_j^1 = \max\{U_j^0 + A, U_{j+1}^0, U_{j-1}^0\} \in \{0, \dots, l\}$  となることがわかる. したがって,  $A \leq 0$  の条件の下で超離散拡散方程式 Eq.(2.26) はその解をセルオートマトンと対応付けられることがわかる. 実際に,  $\alpha = 1/2$  とおこう. このとき  $A \rightarrow -\infty$  となるので, Eq.(2.26) は  $U_j^{n+1} = \max\{U_{j+1}^n, U_{j-1}^n\}$  と簡単な形になる. 今, 初期条件として  $U_j^0 \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, N$  とすれば, この超離散方程式は

$U_{j+1}^n \ U_{j-1}^n$	1 1	1 0	0 1	0 0
$U_j^{n+1}$	1	1	1	0

なるルールに従う. これは, エレメンタリーセルオートマトンのルール 250 そのものである (Fig.2.3).

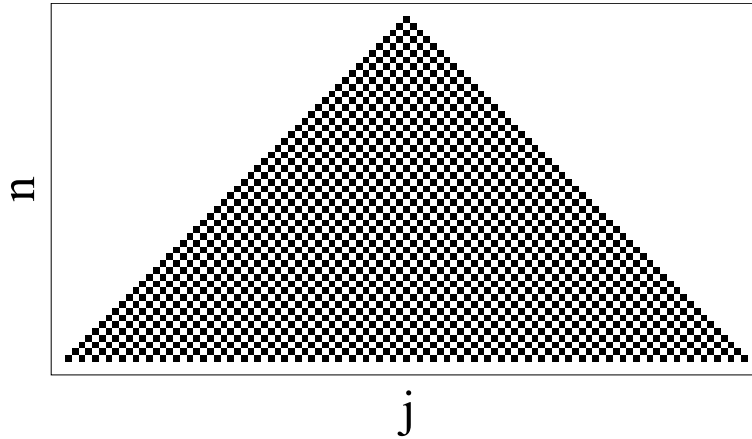


Figure 2.3: 超離散拡散方程式のパターン. エレメンタリーセルオートマトンのルール 250 に一致. 上から下へ時間発展している. (100×200 ステップ)

このセルオートマトンパターンは, 初期値の中で一点だけ黒色の状態を与え, それが, 超離散拡散方程式に従って離散的に拡散していくことを示している. このように, 超離散拡散方程式 Eq.(2.26) はセルオートマトンと大きな関係性がある.

注意として,  $A > 0$  のときは, Eq.(2.26) はもはやセルオートマトンとはならない. すなわち, ある時刻  $n+1$  での状態  $U_j^{n+1}$  の取りえる値の範囲が, その前の時刻  $n$  での状態の取りえる値の範囲と異なる場合がある. 実際,  $U_j^n \in \{m_0, \dots, m_l\}, j = 1, \dots, N, m_1 \in \mathbf{Z}, \dots, m_l \in \mathbf{Z}$  とする. 今,  $m' = \max\{m_0, \dots, m_l\}$  とおく. 添え字を付け替えて (すなわちある全単射が存在して),  $m'$  が  $m_l$  となるようにしよう. もしある  $j_0, n_0$  が存在して  $U_{j_0}^{n_0} = m_l$  とすると,  $A > 0$  の仮定の下で  $U_{j_0}^{n_0+1} = \max\{U_{j_0+1}^{n_0}, U_{j_0}^{n_0} + A, U_{j_0-1}^{n_0}\} = m_l + A \notin \{m_0, \dots, m_l\}$  となり, セルオートマトンとならない. そこで, 任意の時刻で  $U_j^n \neq m_l$  としよう. 今,  $m'' = \max\{m_0, \dots, m_{l-1}\}$  とおいて,  $m''$  が  $m_{l-1}$  となるように添え字を付け替えよう. ある  $j_1, n_1$  が存在して  $U_{j_1}^{n_1} = m_{l-1}$  とすると,  $A > 0$  の仮定の下で  $U_{j_1}^{n_1+1} = \max\{U_{j_1+1}^{n_1}, U_{j_1}^{n_1} + A, U_{j_1-1}^{n_1}\} = m_{l-1} + A$ . ここで, もし  $A \neq m_l - m_{l-1}$  ( $A > 0$ ) とすると,  $U_{j_1}^{n_1+1}$  は, 一つ前の時刻  $n_1$  での状態の取りえる範囲に入らない.  $A = m_l - m_{l-1}$  とするとこれは  $j_1 = j_0, n_1 = n_0$  を意味するので, 上で行った議論よりセルオートマトンとはならない. したがって, さらに任意の時刻で  $U_j^n \neq m_{l-1}$  とする必要がある, 今の議論を繰り返すことになる. 結局,  $m_0$  まで繰り返したのちに状態の取りえる値がなくなってしまうので, セルオートマトンにならない. 以上より,  $A > 0$  のときにはセルオートマトンとはならないことが示された.

このように, 超離散方程式をセルオートマトンと対応付けるためには, 方程式中のパラメータを適切に選ぶ必要がある. これは, 後の章で見る超離散方程式とセルオートマトンとを対応付ける際にも必要となってくる. 一般に, 反応拡散系, パターン形成ダイナミクスにおいて見られるモデルにおいて, その多くが拡散方程式の形 (それが物理的な拡散を意味しなくても), またはこれらに関連するモデルである. すなわち, 超離散化し得られる超離散方程式に基づくモデルでは, 上で行った超離散拡散方程式の性質が大きく関係してくる. したがって, 自ずとセルオートマトンとの関係性も示唆され, この際に適切なパラメータを選ぶ必要性が出てくるのである. 特に, 多くの場合, 超離散モデルは超離散拡散方程式のセルオートマトンパターンを描写する. 例えば, 後の章で見る二つの超離散モデルに対する方程式も, エレメンタリーセルオートマトンのルール 250 をもつパラメータが存在する.

### 2.2.3 超離散 Burgers 方程式

この節の最後に, 超離散化法とセルオートマトンとの関係性を示した先行研究の例として, Burgers 方程式の超離散化について説明する [64][32]. そして, Burgers 方程式の解が超離散化の手続きを行う中でどう変化していくかを見ていくことにしよう.

Burgers 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

なる形の方程式であり, 非線形項  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ , 散逸項  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  をもつ, 流体の一次元衝撃波に対するもっとも簡単な方程式としてよく知られている [65][66]. Eq.(2.27) は, Cole-Hopf 変換 ( $u(x, t) \leftrightarrow \psi(x, t)$ )

$$u = \frac{\partial \log \psi}{\partial x} \quad (2.28)$$

を用いて, 熱伝導方程式 (拡散方程式)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.29)$$

に帰着される. 今, Eq.(2.29) は

$$\psi(x, t) = 1 + \sum_{i=1}^N \{ \exp( c_i x + c_i^2 t + d_i ) \} \quad (2.30)$$

なる解をもつ. 但し  $c_i, d_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) は定数であり, 1 は  $c_0 = d_0 = 0$  の場合である. よって, この解 (2.30) に Cole-Hopf 変換を施した

$$u = \frac{\sum_{i=1}^N \{ c_i \exp( c_i x + c_i^2 t + d_i ) \}}{1 + \sum_{i=1}^N \{ \exp( c_i x + c_i^2 t + d_i ) \}} \quad (2.31)$$

は Burgers 方程式の解となる. この形の解は特に衝撃波解と呼ばれている. Fig.2.4 は  $N = 1, c_1 = 2, d_1 = 0$  のときの衝撃波解 (2.31) を表したものであり, (a)  $t = -2$ , (b)  $t = 0$ , (c)  $t = 2$  となっている.  $N = 1$  の場合は,  $c_1 > 0$  であれば任意の時刻で  $x \rightarrow \infty$  で  $u \rightarrow c_1$  であり,  $x \rightarrow -\infty$  で  $u \rightarrow 0$  となる. またこのとき,  $u(x, t) = f(x + c_1 t)$  となるので, 解の形は速さ  $c_1$  で  $x$  軸の正から負へ移動する. 続いて  $N = 2, c_1 = 2, c_2 = 3, d_1 = d_2 = 0$  のグラフが Fig.2.5 である. このとき,  $0 < c_1 < c_2$  であれば任意の時刻で  $x \rightarrow \infty$  で  $u \rightarrow c_2$ ,  $x \rightarrow -\infty$  で  $u \rightarrow 0$  となる. また,  $t \ll 0$  の範囲では,  $u$  は  $u \sim 0$  ( $x + c_1 t \ll 0$ ),  $u \sim c_1$  ( $-c_1 t \ll x \ll -(c_1 + c_2)t$ ),  $u \sim c_2$  ( $x \gg -(c_1 + c_2)t$ ) なる三つの範囲に分けられる. 一方,  $t \gg 0$  では,  $u \sim 0$  ( $x + c_2 t \ll 0$ ),  $u \sim c_2$  ( $x + c_2 t \gg 0$ ) となる. また Fig.2.5 (a) のグラフにおいて, 上の段は速さ  $c_1 + c_2$  で, 下の段は速さ  $c_1$  で  $x$  軸正方向から負の方向へ移動している. したがって, 時間がたつと  $0 < c_1 < c_2$  から上の段は下の段に追いつき, 一緒になって速さ  $c_2$  で移動する (Fig.2.5 (b), (c)).

次に, Burgers 方程式の差分化を考えよう. まず, Eq.(2.29) の差分方程式は, 既示しており Eq.(2.24) である. 今, Cole-Hopf 変換 (2.28) を差分化すると,  $u_j^n =$

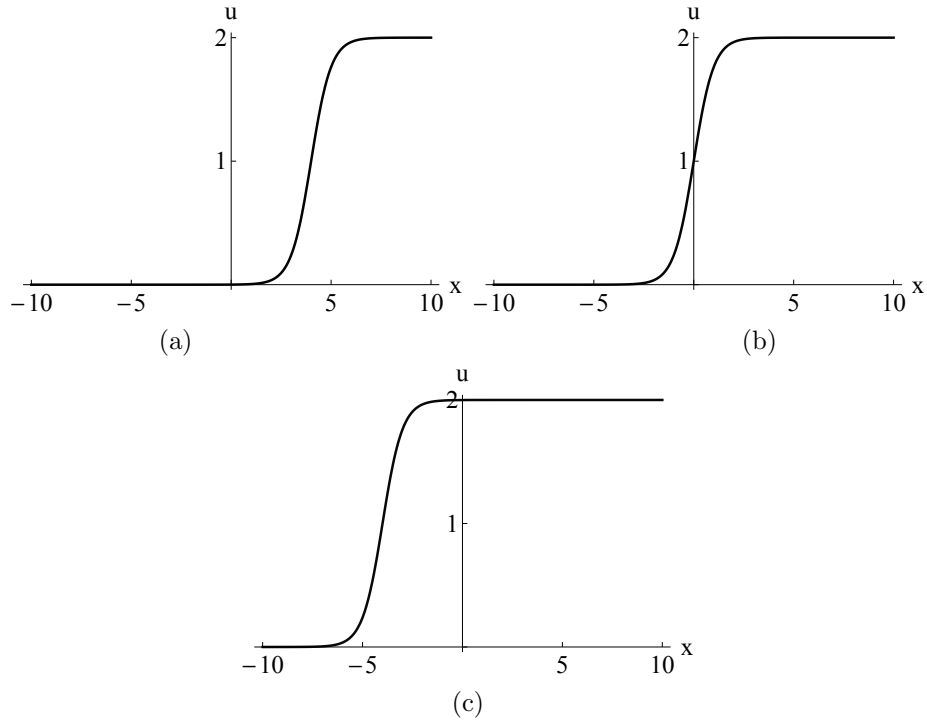


Figure 2.4:  $N = 1, c_1 = 2, d_1 = 0$  の場合の Eq.(2.31) のグラフ. (a)  $t = -2$ , (b)  $t = 0$ , (c)  $t = 2$ . ([32], 図 5.1. 参考)

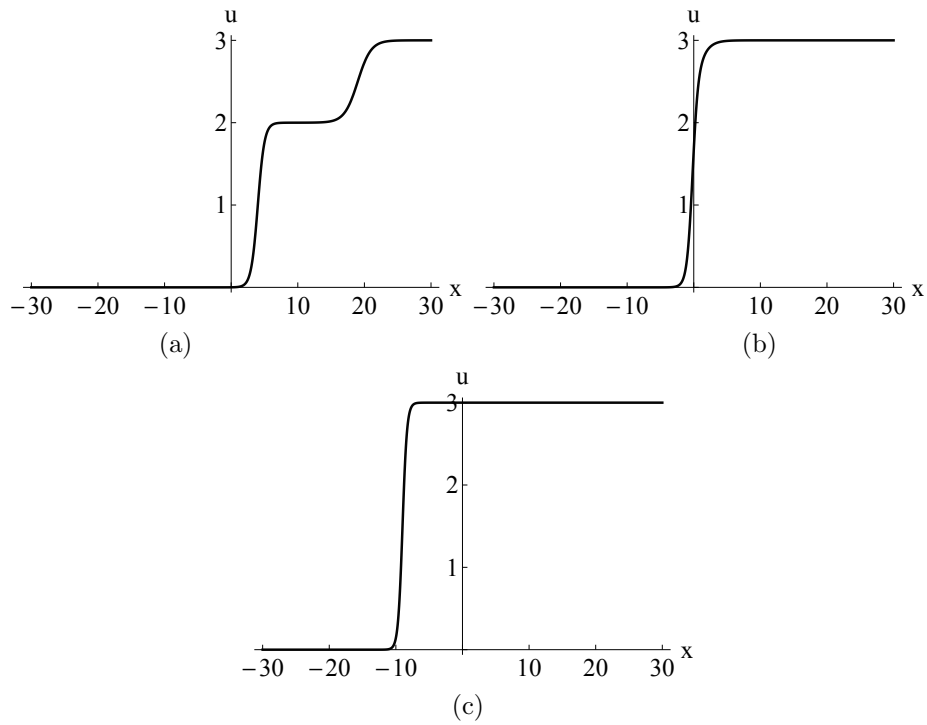


Figure 2.5:  $N = 2, c_1 = 2, c_2 = 3, d_1 = d_2 = 0$  の場合の Eq.(2.31) のグラフ. (a)  $t = -2$ , (b)  $t = 0$ , (c)  $t = 2$ . ([32], 図 5.2. 参考)

$(\log \psi_{j+1}^n - \log \psi_j^n)/\Delta x$  であったため, 変数変換  $v_j^n = \exp\{\Delta x u_j^n\}$  として  $v_j^n$  を定義すると,

$$v_j^n = \frac{\psi_{j+1}^n}{\psi_j^n} \quad (2.32)$$

なる変換を得る. したがって, Burgers 方程式 (2.27) が熱伝導方程式 (2.29) から Cole-Hopf 変換 (2.28) を用いて導出できるため, 同様に Burgers 方程式の差分方程式も, 差分熱伝導方程式 Eq.(2.24) を変換 (2.32) を用いて導出することができる [67][49]. すると, 次の差分 Burgers 方程式を得る.

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{\beta v_{j+1}^n + 1 - 2\beta + \beta/v_j^n}{\beta v_j^n + 1 - 2\beta + \beta/v_{j-1}^n} \quad (2.33)$$

ただし,  $\beta = \Delta t/(\Delta x)^2$  である. さて, Eq.(2.33) の超離散化を考える前に, この差分 Burgers 方程式において先ほどの衝撃波解 (2.31) がどのように表せるかを見よう. 以下では, 簡単のため  $\alpha = 1/2$  とし, まず差分拡散方程式 (2.24) について考える. 今,  $k, \omega, \alpha$  を定数として

$$u_j^n = \exp(kj + \omega n + \alpha) \quad (2.34)$$

を Eq.(2.24) に代入すると, 関係式  $\omega = \log(\cosh k)$  を満たせば Eq.(2.34) は Eq.(2.24) の解であることがわかる. ここで, この  $k$  と  $\omega$  の関係を分散関係という. 注意として,  $k \neq 0$  とすると,  $\cosh k > 1$  なので,  $\omega > 0$  となっている. ここで, Eq.(2.24) が線形差分方程式であることから, 解の重ね合わせが可能であり,

$$u_j^n = 1 + \sum_{i=1}^N \{\exp(k_i j + \omega_i n + \alpha_i)\} \quad (2.35)$$

も, 各  $i = 1, 2, \dots, N$  で  $\omega_i = \log(\cosh k_i)$  を満たす限り解である. この解を変換 (2.32) に代入すると, 差分 Burgers 方程式 (2.33) の解

$$v_j^n = \frac{1 + \sum_{i=1}^N \{\exp(k_i(j+1) + \omega_i n + \alpha_i)\}}{1 + \sum_{i=1}^N \{\exp(k_i j + \omega_i n + \alpha_i)\}} \quad (2.36)$$

を得る. この解が衝撃波解に対応している. 実際,  $k_i = \Delta x \tilde{k}_i, \omega_i = \Delta t \tilde{\omega}_i, t = n\Delta t$  とすると,

$$\begin{aligned} u_j^n = u(\tilde{x}, t) &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \log \left( 1 + \sum_{i=1}^N \{\exp(\tilde{k}_i(x + \Delta x) + \tilde{\omega}_i t + \alpha_i)\} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log \left( 1 + \sum_{i=1}^N \{\exp(\tilde{k}_i x + \tilde{\omega}_i t + \alpha_i)\} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる. ただし,  $u_j^n = \log v_j^n/(\Delta x)$  を用いた. したがって,  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限で



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tilde{u}(x, t) = \frac{d}{dx} \log \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \{ \exp( \tilde{k}_i x + \tilde{\omega}_i t + \alpha_i ) \} \right\}$$

となるので、衝撃波解 (2.31) に一致する.

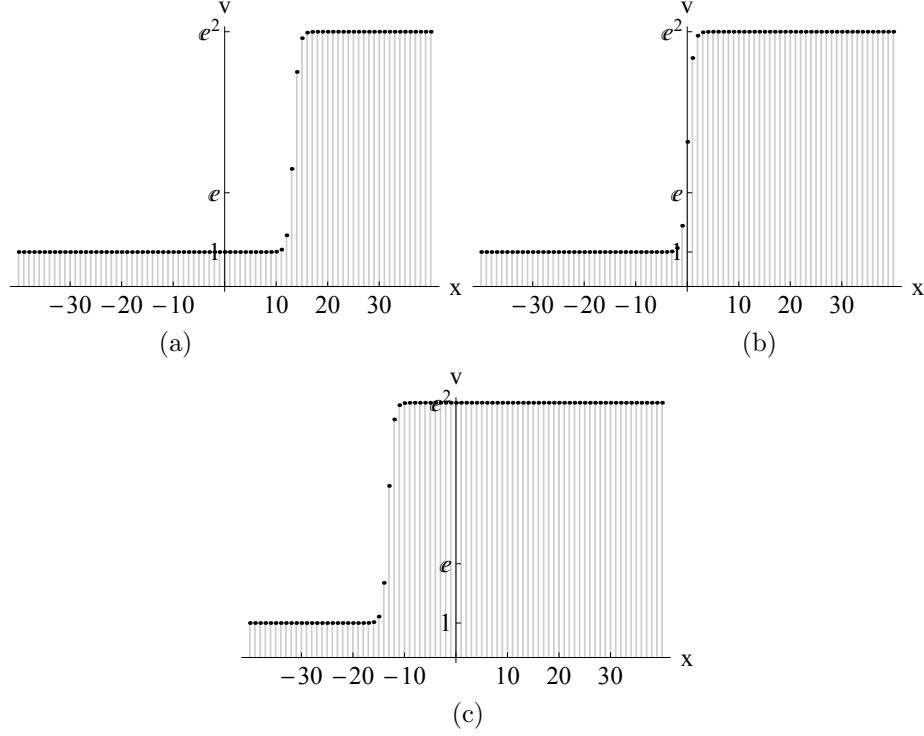


Figure 2.6:  $N = 1, k_1 = 2, \alpha_1 = 0$  のときの Eq.(2.31) のグラフ. (a)  $n = -10$ , (b)  $n = 0$ , (c)  $n = 10$ . ([32], 図 5.3. 参考)

Fig.2.6 は,  $N = 1, k_1 = 2, \alpha_1 = 0$  での差分 Burgers 方程式の衝撃波解 (2.36) のグラフである. ただし, Eq.(2.36) は差分解なので,  $j \in \mathbf{Z}$  としてプロットしている. Fig.2.4 と Fig.2.6 を比べれば, 連続極限で差分衝撃波解 (2.36) が衝撃波解 (2.31) に一致することがわかる. また,  $N = 1$  のとき, 各時刻において  $j \rightarrow -\infty$  で  $v_j^n \rightarrow 1$ ,  $j \rightarrow \infty$  で  $v_j^n \rightarrow e^{k_1}$  となる.  $N = 2, k_1 = 2, k_2 = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  のグラフが Fig.2.7 である.

ここから 差分 Burgers 方程式を超離散化し, 上記の衝撃波解がどのようなになるか述べる. 今, Eqs.(2.32), (2.33) はすべて正值関数なので,  $\psi_j^n = 2^{-n} \exp(\Psi_j^n / \varepsilon)$ ,  $u_j^n = \exp\{(U_j^n - L/2)/\varepsilon\}$  という変数変換を用いて三つの式に代入し, さらに  $\varepsilon \rightarrow +0$  の極限をとれば, Cole-Hopf 変換と Burgers 方程式の超離散化として, それぞれ以下の超離散方程式 (2.37), (2.38) を得る. ただし,  $L$  は定数である.

$$U_j^n = \Psi_{j+1}^n - \Psi_j^n + \frac{L}{2} \quad (2.37)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(U_j^n, L - U_{j+1}^n) \quad (2.38)$$

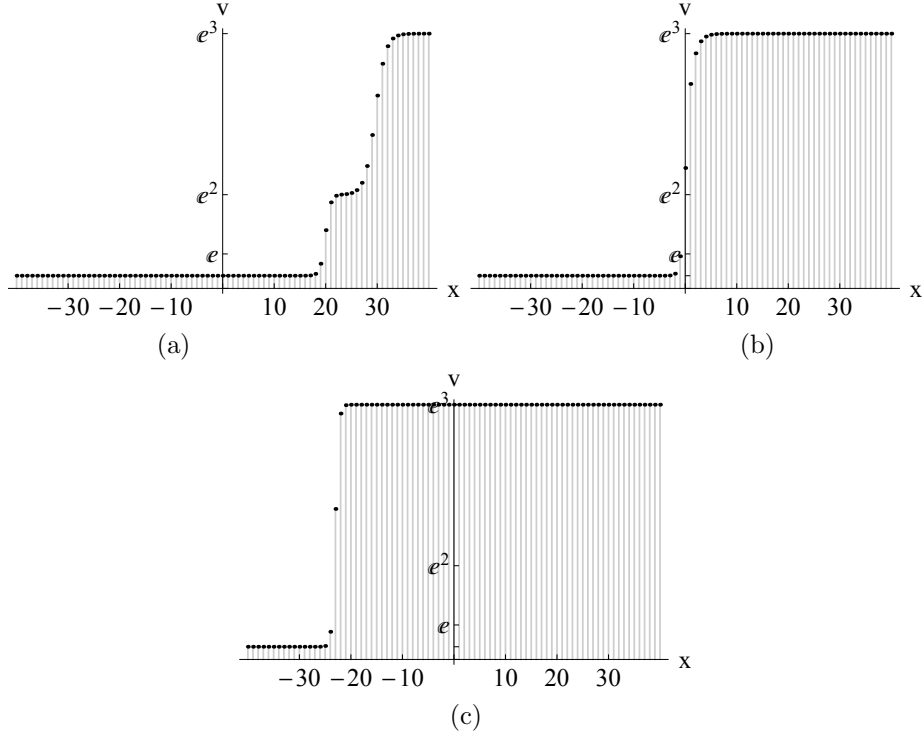


Figure 2.7:  $N = 2, k_1 = 2, k_2 = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  のときの Eq.(2.31) のグラフ. (a)  $n = -30$ , (b)  $n = 0$ , (c)  $n = 30$ . ([32], 図 5.4. 参考)

ここで, Eq.(2.38) を超離散 Burgers 方程式という. さて, Eq.(2.38) について,  $L, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$  が全て整数ならば  $U_j^{n+1}$  も整数となる. よって,  $L$  が整数で  $U_j^n$  の初期値が全て整数であれば, それ以降の任意の時刻で  $U_j^n$  は整数値を取ることが分かる. これは, 超離散方程式の代数構造が max-plus であることに依っており, 一般的な超離散方程式の性質である. すなわち, 従来の差分方程式では, 独立変数は離散である一方で従属変数は連続であったのに対し, 超離散方程式では独立変数ならび従属変数が, ともに離散値をとる. 超離散化の方法によって, 単に連続型の微分方程式が持つ性質だけでなく, 全ての変数の差分化によって見られる新たな関係が議論できるのである. 今, 超離散 Burgers 方程式に対する衝撃波解を考えよう. Burgers 方程式で導いた方法と同様に考える. まず, 超離散反応拡散方程式である Eq.(2.26) の特解として  $\Psi_j^n = Cj + Dn + E$  の形のものを考える. ただし,  $C, D, E$  は定数である. Eq.(2.26) に代入すれば分かるように, 分散関係  $D = \max(C, -C) = |C|$  を満たせば特解となる. このとき, 超離散反応拡散方程式を導出した際に述べたように,  $C_i, E_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) を定数として

$$\Psi_j^n = \max(0, C_1 j + |C_1| n + E_1, \dots, C_N j + |C_N| n + E_N) \quad (2.39)$$

とすると, これも Eq.(2.26) の解となる. ただし,  $0$  は  $C = E = 0$  という解を表して

いる. したがって, 微分系で衝撃波解 (2.31) を導いた場合と同様に, Eq.(2.39) に超離散 Cole-Hopf 変換 (2.37) を施せば, 超離散 Burgers 方程式の解として以下を得る.

$$U_j^n = \max(0, C_1(j+1) + |C_1|n + E_1, \dots, C_N(j+1) + |C_N|n + E_N) - \max(0, C_1j + |C_1|n + E_1, \dots, C_Nj + |C_N|n + E_N) + \frac{L}{2} \quad (2.40)$$

解 (2.40) が超離散 Burgers 方程式の衝撃波解である.

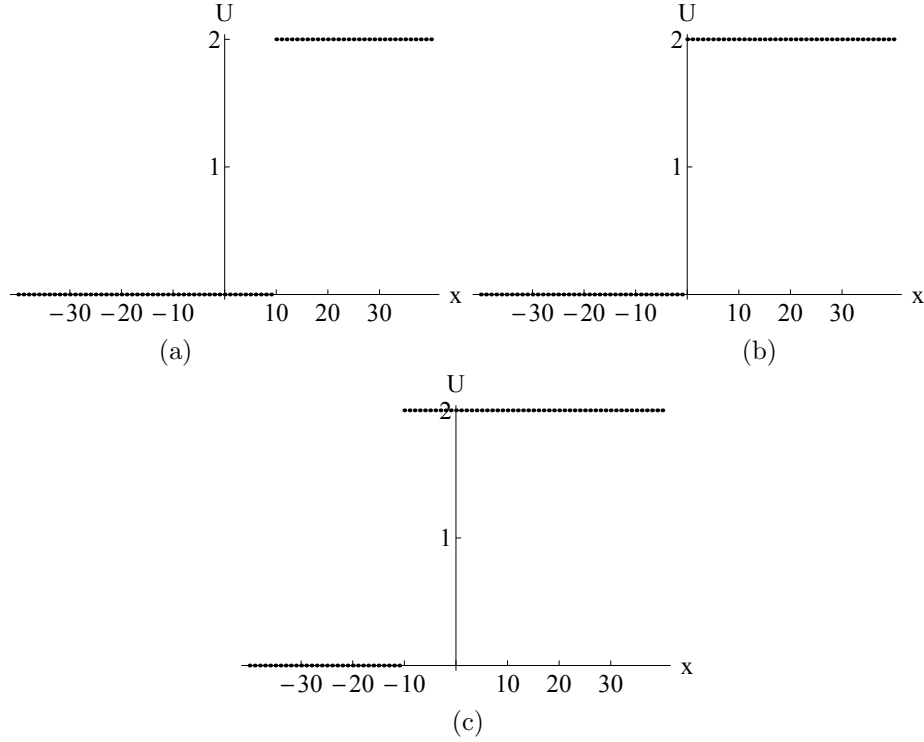


Figure 2.8:  $N = 1, C_1 = 2, E_1 = 0$  のときの Eq.(2.40) のグラフ. (a)  $n = -20$ , (b)  $n = 0$ , (c)  $n = 20$ . ([32], 図 5.5. 参考)

Fig.2.8 は  $N = 1, C_1 = 2, E_1 = 0, L = 0$  のときの超離散 Burgers 方程式の衝撃波解 (2.40) を表したものである. このグラフから微分・差分方程式での衝撃波解 Fig.2.4, Fig.2.6 で見られた性質を再現できていることがわかる. しかしながら,  $N = 2$  の場合, Fig.2.5, Fig.2.7 で見られた, 二段に分かれていた衝撃波解が時間が経つと一段になるという性質が保存されていない (Fig.2.9). 解 (2.40) において,  $\max\{C_1, C_2, \dots, C_N\} = C_{max}$  とおくと,  $C_{max} > 0$  ならば任意の時刻で  $j \rightarrow \infty$  で  $U_j^n \rightarrow \frac{L}{2} + C_{max}$ ,  $j \rightarrow -\infty$  で  $U_j^n \rightarrow \frac{L}{2}$  となる. 一方,  $C_{max} < 0$  では逆に  $j \rightarrow -\infty$  で  $U_j^n \rightarrow \frac{L}{2} + C_{max}$ ,  $j \rightarrow \infty$  で  $U_j^n \rightarrow \frac{L}{2}$  となる. また, このときの速さは必ず 1 になる.

続いて, 超離散 Burgers 方程式 (2.38) にのみ見られる, セルオートマトンとの関係を議論する. 今, Eq.(2.38) の変数に対して  $\forall j, 0 \leq U_j^n \leq L$  であると仮定する. する

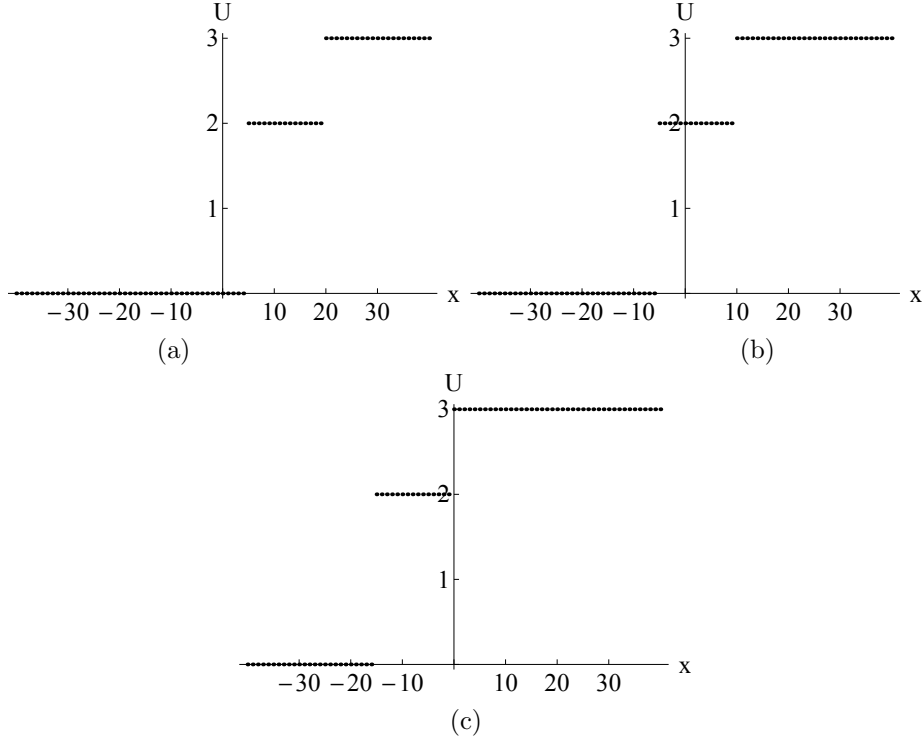


Figure 2.9:  $N = 2, C_1 = 2, C_2 = 3, E_1 = 10, E_2 = 0, L = 0$  のときの Eq.(2.40) のグラフ. (a)  $n = -10$ , (b)  $n = 0$ , (c)  $n = 10$ . ([32], 図 5.6. 参考)

と, 次のステップ  $n + 1$  で  $\forall j, 0 \leq U_j^{n+1} \leq L$  が成り立つことを示すことができる. さらに, 先に述べたが, もし  $U_j^n$  が整数値のみを取るならば, その任意の時刻で整数値を取り続ける事が分かっている. 以上から次のことが言える. すなわち, 初期時刻  $n = 0$  で  $U_j^0$  が 0 から  $L$  までの整数値を取るならば, 以降の任意の時刻  $n$  で  $U_j^n$  は 0 から  $L$  までの整数値を取らなければならない. したがって, 超離散 Burgers 方程式は, 初期値に制限を設けることによって ex1, 2 と同様にセルオートマトンとなることが分かる. 例えば,  $L = 1$  の場合, すなわち 0, 1 を変数としたエレメンタリーセルオートマトンを考えてみよう.  $U_j^n$  は各時刻  $n$ , 位置  $j$  で 0, 1 のいずれかを取り, Eq.(2.38) によって発展すると考える. これをセルオートマトンのルール表に置き換えれば

$U_{j+1}^n \ U_j^n \ U_{j-1}^n$	1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
$U_j^{n+1}$	1	0	1	1	1	0	0	0

となり, ルール番号 184 を得る (Fig.2.10).

すなわち, Burgers 方程式の超離散化は, セルオートマトンと密接に関係している. Fig.2.10 なるセルオートマトンは次の二つの性質をもつことが知られている. (1) 1(黒のセル) の個数が保存する. すなわち,  $\sum_{j=1}^M U_j^n$  が  $n$  に依らず一定である. ただし,  $M$  は一周分きの  $j$  の個数である. (2) 十分時間が経った後では, セルオートマト

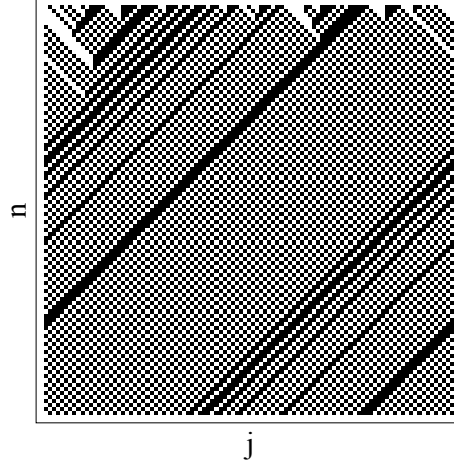


Figure 2.10: エレメンタリーセルオートマトンルール 184(Eq.(2.38) のセルオートマトン解). 初期値はランダムであり, 上から下へ時間発展している. (100×100 ステップ)

ンは左もしくは右ずれのパターンに必ず落ち着く. この (1), (2) の特徴は, 超離散 Burger 方程式 (2.38) を解析することで, 数学的に証明することができる [64]. また, Eq.(2.38) の解釈として交通流モデルと関連付けられることが多く, 実際, 多くの交通流シミュレーターの基礎となっている [68].

以上のように, 気体の衝撃波の方程式である Burgers 方程式からセルオートマトンを基礎とした交通流モデルの方程式が導き出せるという結果は, ある意味で超離散化が両者を同一視する助けをしており, また, 一般にある微分方程式とセルオートマトンとを素直に結びつけるための手法であることも示している.

## 2.3 tropical 差分化を用いた超離散化の方法

前節では, 具体的に簡単な微分方程式に対する超離散方程式を導出した. また, 超離散化を行う際に負の問題が存在することも示した. この節では, 後の章で与えられる非平衡, 非線形系における微分方程式の超離散化法の手法として, tropical 差分化 [39][40] に基づく超離散化の方法を紹介する.

### 2.3.1 tropical 差分化法

次の反応拡散方程式を考えよう.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - g(u), \quad (2.41)$$

ただし,  $u = u(x, t) \geq 0$ ,  $D$  は拡散係数,  $f, g \geq 0$  である. ここで, Eq.(2.41) の超離散方程式を得るためには, 適切な差分化をほどこして差分方程式を導く必要がある. 今,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + f(u_j^n) - g(u_j^n) \quad (2.42)$$

と方程式を差分化しよう. ここで,  $\Delta t = t/n$ ,  $\Delta x = x/j$  とした.  $v_j^n = (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$ , そして,  $f(u_j^n) - g(u_j^n)$  を  $v_j^n(f(v_j^n) - g(v_j^n))/(v_j^n + \Delta t g(v_j^n))$  と置き換えて Eq.(2.42) を整理すると, Eq.(2.41) の差分方程式

$$u_j^{n+1} = v_j^n \frac{v_j^n + \Delta t f(v_j^n)}{v_j^n + \Delta t g(v_j^n)} \quad (2.43)$$

を得る. ただし, 簡単のため  $D\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$  とおいた. この差分化を tropical 差分化という. ここで, 差分方程式 Eq.(2.43) には, 元の微分方程式 Eq.(2.41) に表れていた負の問題がなくなっていることに注意しよう. すなわち, 超離散化可能な形になっている. したがって, Eq.(2.43) に変数変換

$$\Delta t = (1/2)^{n+1} e^{T/\varepsilon}, \quad u_j^n = (1/2)^n e^{U_j^n/\varepsilon}, \quad f(u_j^n) = e^{F(U_j^n)/\varepsilon}, \quad g(u_j^n) = e^{G(U_j^n)/\varepsilon} \quad (2.44)$$

をほどこし, 超離散化極限公式 Eq.(2.10) を用いると, 次の超離散方程式を得る.

$$U_j^{n+1} = V_j^n + \max\{V_j^n, T + F(V_j^n)\} - \max\{V_j^n, T + G(V_j^n)\} \quad (2.45)$$

ここで,  $V_j^n = \max\{U_{j+1}^n, U_{j-1}^n\}$  とした. このように, Eq.(2.41) の反応拡散方程式に対して超離散方程式 Eq.(2.45) を導出することが可能である. 例えば,  $f, g$  として

$$f(\phi) = (\alpha + \beta + \gamma)\phi^2 + \alpha\beta\gamma, \quad g(\phi) = \phi^3 + (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)\phi \quad (2.46)$$

をとれば, Eq.(2.41) は Allen-Cahn 方程式 [57]-[59] となる. この Allen-Cahn 方程式に対する超離散方程式は上記の tropical 差分化を用いて導出することができ, その性質も研究されている [40]. 中でも, 後に説明する超離散 Allen-Cahn 方程式に見られる超離散安定性 (Ultradiscrete stability) という性質は, 第4章で見る反応拡散モデルに対して超離散化を適用して得られる超離散方程式の安定性解析を行う際に重要になってくる.

ここで, 超離散方程式 Eq.(2.45) の tropical 差分化を用いた導出過程における, 変数変換時の注意点について言及しておく. まず, 変数変換 (2.44) において,  $u_j^n, \Delta t$  における係数  $(1/2)^n$  及び  $(1/2)^{n+1}$  は一般的に  $f, g$  の形に依存することに注意しよう. 例えば, もし  $f, g$  が共に  $k$  次同次関数, すなわち  $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots)$  であるとする,  $\Delta t$  の係数を  $2^{n(k-1)-1}$  にする必要がある. 実際, まず,  $f(u_j^n) =$

$f((1/2)^n e^{U_j^n/\varepsilon}) = ((1/2)^n)^k f(e^{U_j^n/\varepsilon})$  である. Eq.(2.43) から Eq.(2.45) の導出の際の  $\Delta t f(u_j^n) \rightarrow (1/2)^{n+1} e^{T/\varepsilon} f(e^{U_j^n/\varepsilon})$  となるには,  $\Delta t = a e^{T/\varepsilon}$  とすると  $a(1/2)^{nk} = (1/2)^{n+1}$  から  $a = (1/2)^{n+1-nk} = 2^{n(k-1)-1}$  を得る. 逆に,  $a$  をこのようにとれば,  $f, g$  が  $k$  次同次関数において Eq.(2.43) から Eq.(2.45) を超離散極限公式により導出することが可能である. もし,  $f, g$  が異なる次数の同次関数ならば, 変数変換  $u_j^n = (1/2)^n e^{U_j^n/\varepsilon}$  における係数  $(1/2)^n$  も変える必要がある.

この変数変換の議論において,  $\Delta t = a(n) e^{T/\varepsilon}$  となるとき,  $\Delta t$  が  $n$  の関数であるように見えてしまう. これは, 差分化の際に ex.2 で見たような陽な差分化の一般式 Eq.(2.23) を用いているためであり [32], 以下に見る変数変換によって定数  $a(n)$  を取り除いて超離散化を考えることもできる. 今,  $D\Delta t/(\Delta x)^2 = \mu$  とおこう. すると,  $v_j^n = \mu(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + u_j^n$  となる. 右辺中の負の項を消すため,

$$\tilde{\mu} = \frac{1 - 2\mu}{2\mu} \quad (2.47)$$

として  $\tilde{\mu}$  を定義する. この  $\tilde{\mu}$  を用いると, Eq.(2.41) から Eq.(2.43) を導出した計算と全く同様にして, Eq.(2.41) の差分方程式

$$u_j^{n+1} = \tilde{v}_j^n \frac{\tilde{v}_j^n + \Delta t f(\tilde{v}_j^n)}{\tilde{v}_j^n + \Delta t g(\tilde{v}_j^n)}, \quad (2.48)$$

を得る. ただし,  $\tilde{v}_j^n = \frac{1}{2(1+\tilde{\mu})}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n + 2\tilde{\mu}u_j^n)$  である. さらに, Eq.(2.48) に変数変換

$$\Delta t = e^{T/\varepsilon}, u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}, f(u_j^n) = e^{F(U_j^n)/\varepsilon}, g(u_j^n) = e^{G(U_j^n)/\varepsilon} \quad (2.49)$$

を施し,  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすれば, Eq.(2.45) の形の超離散方程式を得る. ただし, この場合  $V_j^n = \max\{U_{j+1}^n, U_{j-1}^n, M + U_j^n\} - \max\{0, M\}$  である.

第3章以降に出てくる tropical 差分化を用いた超離散化方程式は, 変数変換の際に指数関数の前に  $n$  を変数とする係数がついている. これは, 上記のように差分化の際に出てくる問題であり,  $n$  に依存しない形にすることができる. ただし, その際に超離散化方程式に余分な項  $\max\{0, M\}$  が加わる. しかしながら, 第3章以降に出てくる超離散化方程式中の  $M$  は  $M \leq 0$  であることが要求されるため,  $\max\{0, M\} = 0$  となり, この付加的な項は無視される.

さて, tropical 差分化を用いて超離散方程式を導く際の変数変換については, 別の問題が存在する. そもそも差分方程式は  $\Delta t$  を 0 に近づけるに従って元の微分方程式に近づかなければならない. しかしながら, 今,  $\Delta t = e^{T/\varepsilon}$  なる変数変換を考えているが, 差分方程式から超離散方程式への移行の際に  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると, もし  $T > 0$  であれば  $\Delta t = e^{T/\varepsilon}$  は上に発散してしまう. すなわち,  $T \rightarrow -\infty$  でなければ, 超離散化の際

に元の微分方程式の情報は失われてしまうように思われる。ところが、もし Eq.(2.45) の第二, 三項目が無視できるほど  $T$  を小さくとると, Eq.(2.45) は単なる超離散拡散方程式 Eq.(2.26) へ帰着する。すなわち, もとの反応拡散方程式の  $f(u) - g(u)$  の効果が無視されてしまう。したがって,  $T$  は関係式  $T > V_j^n - F(V_j^n)$  または  $T > V_j^n - G(V_j^n)$  を満たす必要がある。このとき, 元の方程式の性質を保った超離散方程式の解が存在する [40]。以上の点は, tropical 差分化を用いた超離散化の方法に特有の問題であり, 今後, 解決が期待される。なお,  $T$  を大きくとれば, 元の方程式の性質を保った超離散方程式の解が存在するという特徴は本論文中第 3 章以降で述べるモデルにもあてまる。

### 2.3.2 Langevin 方程式の超離散化

最後に, tropical 差分化にもとづく超離散化の例をもう一つ述べる。

ex.3: ex.2 で, 非平衡緩和過程における超離散化方程式を議論した。物理的には, Eq.(2.20) は  $x$  が平均的揺らぎにくらべ大きいときにのみ正しい。それ以外の一般の  $x$  に関しては, 方程式を

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau} + y \quad (2.50)$$

としなければならない。ここで  $y$  はノイズを表す量であり, その平均値は 0, 異なる時刻間では相関がない。すなわち, 次の条件を満たす。

$$\langle y \rangle = 0, \quad \langle y(t)y(t') \rangle = \frac{2T}{\tau} \delta(t - t') \quad (2.51)$$

ただし,  $T$  は系の温度で,  $\delta(x)$  は  $\delta$  関数である。また,  $\langle \rangle$  は  $y$  のあるあゆる実現に関する平均を表している。このような方程式 (2.50) は Langevin 方程式 [60][61] と呼ばれ, 統計力学で熱ゆらぎを考える際の基本的な方程式として知られている。

この Langevin 方程式 (2.50) の超離散方程式を tropical 差分化を用いて導出してみよう。まず, Eq.(2.50) に対する差分方程式を

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = -\frac{x^n}{\tau} + y^n \quad (2.52)$$

とする。ここで,  $y^n$  は

$$\langle y^n \rangle = 0, \quad \langle y^n y^{n'} \rangle = \frac{2T}{\tau} (\Delta t)^{-1} \delta_{nn'} \quad (2.53)$$

を満たす。ただし,  $\delta_{nn'} = 0$  ( $n \neq n'$ ),  $= 1$  ( $n = n'$ ) でクロネッカーの  $\delta$  である。ノイズ  $y^n$  は負の値も取り得ることに注意する。実際, (2.53) から  $y$  の平均は 0 なので,



正; 負どちらの方向にもゆらぎが発生している. したがって, 差分方程式 Eq.(2.52) には負の問題が存在し, ex.2 で行った Eq.(2.21) の導出と同様に議論することはできない. そこで, tropical 差分化を適用しよう. 今, ノイズ  $y$  を正と負のノイズの絶対値数  $y_+, y_- > 0$  を用いて

$$y^n = y_+^n + (-y_-^n) \quad (2.54)$$

と表す. これを Eq.(2.52) に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= (1 - \beta)x^n + \frac{\Delta t(1 - \beta)x^n(y_+^n - y_-^n)}{(1 - \beta)x^n + \Delta t y_-^n} \\ &= \frac{(1 - \beta)^2(x^n)^2 + \Delta t(1 - \beta)x^n y_-^n + \Delta t(1 - \beta)x^n y_+^n - \Delta t(1 - \beta)y_-^n x^n}{(1 - \beta)x^n + \Delta t y_-^n} \\ &= (1 - \beta)x^n \frac{(1 - \beta)x^n + \Delta t y_+^n}{(1 - \beta)x^n + \Delta t y_-^n} \end{aligned}$$

を得る. ただし,  $\beta = \Delta t/\tau$  である. ここで以下の変数変換を行う.

$$1 - \beta = e^{B/\varepsilon} (> 0), \quad x^n = e^{X^n/\varepsilon}, \quad \Delta t y_\pm^n = e^{\Xi_\pm^n/\varepsilon} \quad (2.55)$$

さらに, 超離散化極限公式 Eq.(2.10) を用いて超離散方程式

$$X^{n+1} = B + X^n + \max\{B + X^n, \Xi_+^n\} - \max\{B + X^n, \Xi_-^n\} \quad (2.56)$$

を得る. これが Langevin 方程式に tropical 差分化を適用して導出した超離散方程式である.

次に,

$$\Xi^n = \Xi_+^n - \Xi_-^n \quad (2.57)$$

なる記号  $\Xi^n$  を導入して, 超離散方程式 (2.56) のダイナミクスを見てみよう. Eq.(2.56) の第二, 三項の  $\max\{B + X^n, \Xi_\pm^n\}$  から,  $B + X^n \gtrless \Xi_\pm^n$  の四通りの場合が存在することがわかる. それぞれの場合についての時刻  $n$  から  $n+1$  の状態遷移を以下に述べる.

**1 :**  $B + X^n > \Xi_\pm^n$  のとき, Eq.(2.56) は

$$X^{n+1} = B + X^n + \max\{B + X^n, \Xi_+^n\} - \max\{B + X^n, \Xi_-^n\} = B + X^n$$

となる.  $B < 0$  であったので,  $X^{n+1} = B + X^n < X^n$  となる. これは, ex.1 で述べた超離散方程式 (2.21) のダイナミクスに一致する. すなわち,  $n$  から  $n+1$  への遷移で傾き  $B$  の分だけ状態  $X^n$  が小さくなる.

**2 :**  $\Xi_-^n < B + X^n < \Xi_+^n$  のとき, Eq.(2.56) は

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= B + X^n + \max\{B + X^n, \Xi_+^n\} - \max\{B + X^n, \Xi_-^n\} \\ &= B + X^n + \Xi_+^n - (B + X^n) = \Xi_+^n \end{aligned}$$

となる. すなわち,  $X^{n+1} = \Xi_+^n > B + X^n$  なので,  $\Xi_+^n$  のノイズによって本来の位置  $B + X^n$  より少し大きい値へと遷移する. このとき,  $0 < \Xi_+^n - \Xi_-^n = \Xi^n$  となっている.

**3** :  $\Xi_+^n < B + X^n < \Xi_-^n$  のとき, Eq.(2.56) は

$$X^{n+1} = 2(B + X^n) - \Xi_-^n$$

となる. ここで,  $B + X^n - \Xi_-^n < 0$  なので,  $X^{n+1} < B + X^n$  となる. つまり,  $\Xi_-^n$  のノイズによって本来の位置  $B + X^n$  より少し小さい値へと遷移する. また, このとき  $\Xi^n < 0$  である.

**4** :  $B + X^n < \Xi_\pm^n$  のとき, Eq.(2.56) は

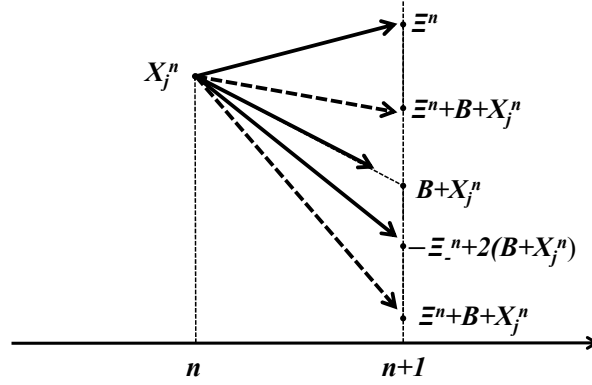
$$X^{n+1} = B + X^n + \Xi^n$$

となる. このとき,  $\Xi_\pm^n$  の大小によって  $\Xi^n$  の正負が決まる. したがって,  $X^{n+1} \gtrless B + X^n$  は確率的に決まる.

これら四つのダイナミクスを Fig.2.11 に図示した. これらの中で, **2**, **3** の状態遷移は Langevin 方程式 (2.50) の  $y > 0$  または  $y < 0$  に対する状態遷移に一致する. 今回はさらに二つの場合 **1**, **4** が存在している. これは, 超離散方程式 (2.56) を考えることで方程式の解が増えることを意味している. この性質は, 後の章で見る超離散方程式にも現れており, 超離散化によって元の方程式が示すパターンより多くのパターンを導く. 超離散方程式 (2.56) は, 初期値  $X^0$  から負の方向に進みたい一方, ノイズの効果によって上下に揺れながら時間発展する. この意味では, ノイズ  $\Xi^n$  に非常に依存したダイナミクスであり, 元の Langevin 方程式のダイナミクスに類似している.

ここで, Eq.(2.56) と 1 次元 Random Walk との関係性について見ていこう [62][63]. 1 次元の Random Walk とは, 1 次元格子状の粒子が単位時間ごとに右か左に等確率で  $a(> 0)$  格子分移動する運動である. 通常は  $a = 1$  としている. また, 右に動くか左に動くかは, それ以前の運動には依らない. すなわち, 各運動間に相関は存在しない. 今, Eq.(2.56) の解として 1 次元 Random Walk を再現できるものがあるかを見ていくことにする. まず,  $\Delta t \rightarrow 0$  から  $\beta \sim 0$ . したがって, Eq.(2.55) から  $B \sim 0$  を仮定する. また, ノイズ  $\Xi_+^n, \Xi_-^n (\geq 0)$  をそれぞれ次のように与えよう.

$$\Xi_+^n = \begin{cases} a + X^n & (p = \frac{1}{2}) \\ X^n & (1 - p = \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad \Xi_-^n = \begin{cases} X^n & (p = \frac{1}{2}) \\ a + X^n & (1 - p = \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (2.58)$$

Figure 2.11: 超離散方程式 (2.56) の  $n$  から  $n+1$  への状態遷移

ここで,  $p = 1/2$  は確率  $1/2$  を表す. すなわち,  $\Xi_{\pm}^n$  は等確率で  $a + X^n$  もしくは  $X^n$  を返す. すると, Eq.(2.57) から

$$\Xi^n = \begin{cases} a & (p = \frac{1}{2}) \\ -a & (1 - p = \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (2.59)$$

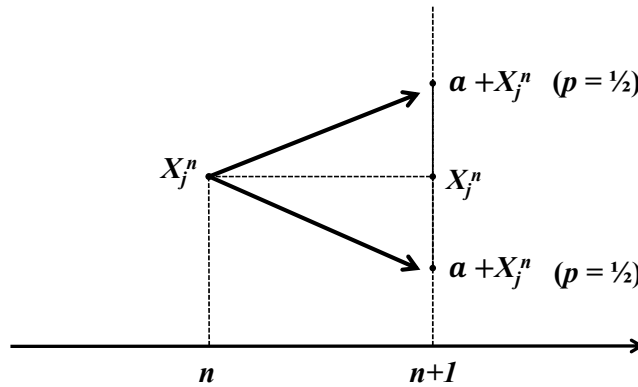
を得る. このとき, Eq.(2.56) は

$$X^{n+1} = X^n + \max\{X^n, \Xi_+^n\} - \max\{X^n, \Xi_-^n\} = X^n + \Xi_+^n - \Xi_-^n$$

となり, したがって

$$X^{n+1} = X^n + \Xi^n \quad (2.60)$$

なる簡単な差分方程式に帰着される. Eq.(2.60) の状態遷移 (Fig.2.12) を考えれば, この運動は変数  $X^n$  における Random Walk そのものを再現する. したがって, Langevin

Figure 2.12: 超離散方程式 (2.60) の  $n$  から  $n+1$  への状態遷移

方程式を tropical 差分化を用いて超離散化した Eq.(2.56) において, その解は直接 1 次元 Random Walk することが示された.

その他にも, Eq.(2.56) のダイナミクスの中の 1 番目を考えると, 1 次元 Random Walk に対してさらにその場に留まる確率を有するダイナミクスも再現できる. このように, 従来の Langevin 方程式では直接関係づけられないような現象に対して, 超離散化した方程式はその現象のダイナミクスを解として再現する場合がある.

現段階では, 差分 Langevin 方程式 (2.52) におけるノイズ  $y^n$  と  $\Xi^n$  との関係は明確にはわかっていないため, Eq.(2.56) のダイナミクスにどのようなノイズ  $\Xi^n$  が関係してくるかはわからない. 特に, Eq.(2.52) においては, ノイズ  $y^n$  に対して揺動散逸関係 (2.53) が成立していた. しかし超離散化 (2.56) において  $\Xi^n$  に対する揺動散逸関係が存在するかどうか不明である.

ex.3 は非平衡緩和過程に対する超離散化の適用例としてとりあげた. しかしながら, ex.1 の最後に行った議論と同様, 物理的に元の Langevin 方程式を完全には再現できていない. また, 超離散極限公式を適用した後の揺動散逸関係もまだ解っていない. しかしながら, 類似点が存在することも事実である. 注意として, 超離散方程式 (2.56) はセルオートマトン化ができない. したがって, 後の章で見るセルオートマトンとの対応関係を議論することはできない. また, 通常は Langevin 方程式に対しフーリエ変換を施し, スペクトルを見て議論を展開していくが, これに対応する超離散方程式の解析方法は解っていない. このように超離散法の, 非平衡, 非線形系への適用はいまだ確立されていない.

## Chapter 3

# 大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の確率セルオートマトンに基づく考察

本章から, 具体的に非平衡統計力学, 非線形動力学に基づく物理モデルに対して超離散化法を適用し, 解析を行う. まずはじめに, 大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団のパターン現象に対して考察する. この現象に対して既に報告されている力学系モデルから超離散モデルを導出し, その得られた超離散方程式が生み出す確率セルオートマトンに対して解析を行う.

### 3.1 Introduction

粘着テープ剥離実験において, Fig.3.1 に例示されるパターン形成が起こることが知られている [69][70]. また, パラメータを変えると形成されるパターンが変化することも知られている. このようなパターン形成のダイナミックスは, 次の四つの特徴を合わせ持つ力学系モデルのダイナミックスと考えることができる [71].

- 1) 双安定性, 2) 非対称局所的相互作用, 3) 大域的相互作用, 4) ノイズ

これらの性質を示す力学系の方程式として, 次の微差分方程式が提案されている.

$$\frac{d\phi_j}{dt} = -(\phi_j - \alpha)(\phi_j - \beta)(\phi_j - \gamma) + D\{\theta(\phi_{j+1} - \phi_j) + \theta(\phi_{j-1} - \phi_j)\} - (\bar{\phi} - V) + \xi_j \quad (3.1)$$

ここで,  $\phi_j > 0$  ( $j = 1 \sim N$ ) は状態変数,  $D, V, \alpha, \beta, \gamma$  は定数 ( $\alpha < \beta < \gamma$ ),  $\theta(x) = x$  ( $x > 0$ ),  $0$  ( $x \leq 0$ ),  $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_j$ , そして  $\xi_j$  はノイズである. 右辺第1項は双安定性を表しており, 第2項が非対称局所的相互作用を表し, 第3項が大域的相互作用を表す部分である. 以下に, 粘着テープ剥離実験に基づいて Eq.(3.1) を説明する.

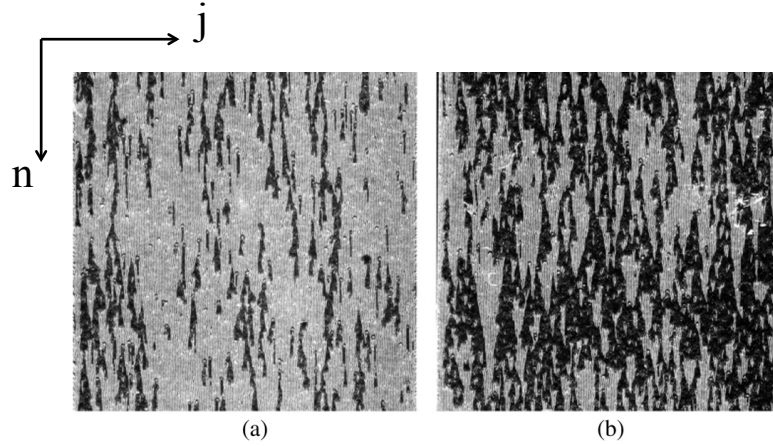


Figure 3.1: 粘着テープ剥離実験でみられるパターン. (a)  $V = 0.8$  mm/min, (b)  $V = 1.0$  mm/min.  $V$  は粘着テープを引きはがす速度である. ([70], Fig.11)

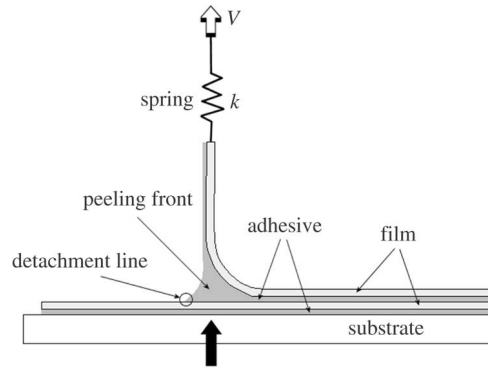


Figure 3.2: 粘着テープ剥離実験模式図. 黒い矢印は、パターンを観察する方向を示している. ([70], Fig.2)

まず粘着テープの剥離実験から得られた結果を簡単に述べる. 実験の詳細は文献 [70] を参照されたい. この実験状況は Fig.3.2 に示した. 実験に用いるパラメータはテープを剥がす速度  $V$  とばね定数  $k$  (または剥がす力  $F$ ) であり, これらのパラメータを変えることで, 剥離されるテープの前方部分 (peeling front) の状態が二つの特徴的な状態を取ることが観測された [72][73](Fig.3.3). Fig.3.3 において, 左側の図をトンネル構造をもつ状態  $A$ , 右側の図をトンネル構造がない状態  $B$  として定義する. 実験結果として, パラメータ  $V, F$  と  $A, B$  との関係が Fig.3.4 の  $V - F$  曲線のグラフとして得られている. 注目すべきは,  $k$  の値が小さい左二つの図では  $V \sim 1$  mm/min で状態  $A, B$  が交互に振動して現れる領域が存在するという点である [74][75]. この領域は  $k$  の値が大きくなるにつれて減少し, やがて無くなって, 二つの状態  $A, B$  が混在する状態となる (一番右の図).  $k$  と  $V$  の関係をまとめた相図が Fig.3.5 である.  $V \lesssim V_L$  の領域に一樣にトンネル構造が現れ ( $A$ ),  $V_H \lesssim V$  の領域ではトンネル構造

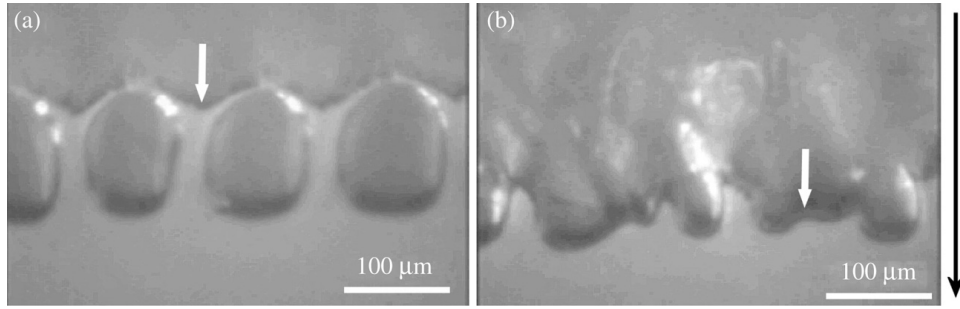


Figure 3.3: 剥離されるテープの前方部分 (peeling front) の状態. (a)  $V = 0.4$  mm/min, (b)  $V = 3.0$  mm/min. ([70], Fig.6)

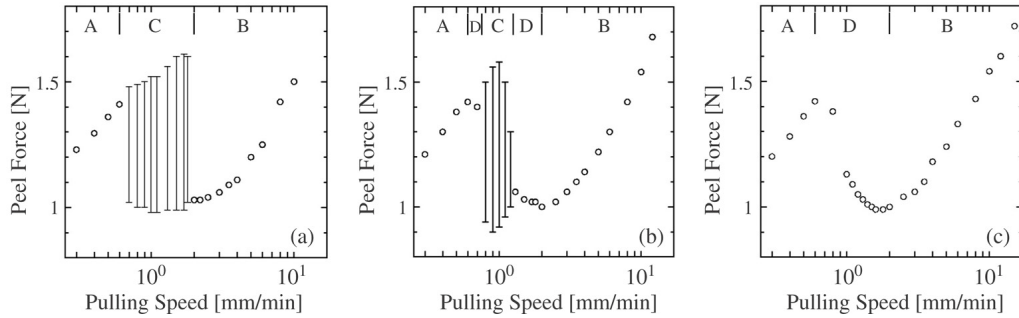
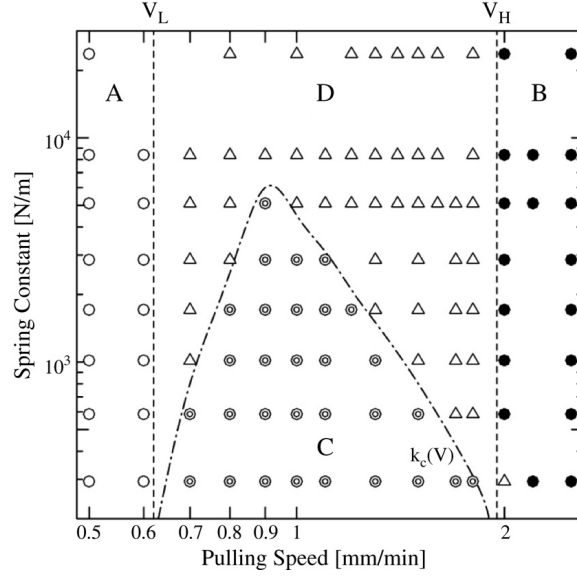


Figure 3.4:  $V - F$  グラフ. (a)  $k = 2.9 \times 10^2$  N/m, (b)  $k = 1.7 \times 10^3$  N/m, (c)  $k = 2.4 \times 10^4$  N/m. ([70], Fig.3)

は完全に消える (B).  $V_L \lesssim V \lesssim V_H$  の領域では,  $k$  が小さいと振動状態となり (C), 大きいと混合状態となる (D).

次に, この実験結果について力学系モデルでの解釈を試みる. そこで, 次の二つの方程式を用いて実験をとらえる. 1. 剥離部分 (peeling front) の運動方程式, 2. 剥離内部状態の時間発展方程式である. まず, 剥離部分の運動方程式について考える. Fig.3.2 を簡略化して考え, peeling front 部分の位置を  $s$  とし,  $F_s$  をばねの力,  $F_a$  を粘着力とする. 今の場合  $V = \text{const}$  としているので  $F_s - F_a = 0$  となっている. すなわち, ばねの力と粘着力は釣り合っている. 時刻  $t = 0$  における初期条件として,  $s = 0, F_s = 0$  を与えると, 時刻  $t$  で  $F_s = k(Vt - s)$  となる. ここで,  $Vt - s$  はばねの伸びである. また, 粘着力  $F_a$  を  $\Sigma_j \phi_j \dot{s}$  とおこう. すると, 運動方程式 (釣合の式) は

$$k(Vt - s) = N \bar{\phi} \dot{s} \quad (3.2)$$

Figure 3.5:  $V - k$  相図. ([70], Fig.8)

となる. ただし,  $\bar{\phi}$  は  $\phi$  の平均  $\frac{\sum_j \phi_j}{N}$  であり,  $\phi_j$  は摩擦係数を意味する. つづいて, 剥離の内部状態を考える. 剥離部分同様,  $\phi_j$  を摩擦係数と見て, その時間微分  $\dot{\phi}_j$  を次のように仮定する.

$$\dot{\phi}_j = -f_{int}(\phi_j) - f_{ext} + \xi_j \quad (3.3)$$

ただし,  $f_{int}(\phi_j)$  は系を定常状態 ( $\dot{\phi}_j = 0$ ) にする内部の項で, これについては後述する. また,  $f_{ext}$  は外力項,  $\xi_j$  はノイズである. 今回の実験において外力項は, テープを剥がす力によって生ずるものであり, したがって, 剥離部分の運動方程式を導く際の議論から, 粘着力として対応させることができる. よって,  $f_{ext} = \bar{\phi}(\dot{s} - v^*)$  とする. ただし  $v^*$  は定数である. ここで, 力で方程式を表すため  $s$  から  $u$  への変数変換  $u \equiv k(Vt - s)/N$  を行くと, Eq.(3.2) 及び Eq.(3.3) は

$$\tau \dot{u} = V - u/\bar{\phi} \quad (3.4)$$

$$\dot{\phi}_j = -f_{int}(\phi_j) + \bar{\phi}v^* - u + \xi_j \quad (3.5)$$

となる. ここで,  $\tau = N/k$  である. さて, 今ばねがとても固いと考えよう. すなわち, ばね定数  $k$  が非常に大きい場合を考える. すると,  $\tau \rightarrow 0$  であり, Fig.3.5 からわかるように, 系は混合状態 (D) となる. このとき, Eq.(3.4) は  $u = \bar{V}$  となることから Eq.(3.5) に統合することができ, 次の  $\phi$  だけで閉じた式を得る.

$$\dot{\phi}_j = -f_{int}(\phi_j) + \bar{\phi} - V + \xi_j \quad (3.6)$$

ただし,  $\bar{\phi}(v^* - V)$  を  $\bar{\phi} - V$  とおいた. さて, この Eq.(3.6) の第一項目  $f_{int}(\phi_j)$  について考えよう. 先に記したように, 今回の粘着テープ剥離実験においては, その剥がれ



方にはトンネル構造があるかないかの二種類の安定状態がある. この双安定状態に対して,  $\phi_j = \alpha$  であるときトンネル構造があり,  $\phi_j = \gamma$  であるときトンネル構造がないときの状態と定める. このとき, トンネル構造の有無によって剥がれ易さが異なるという実験事実を反映し, 摩擦係数である  $\phi_j$  とトンネル構造との対応関係を仮定している. この事実は非線形動力学の観点から  $-(\phi - \alpha)(\phi - \beta)(\phi - \gamma)$  が  $\phi$  の時間微分に等しいとしてモデル化される. ただし  $\alpha < \beta < \gamma$  である. さらに, トンネル構造は近傍にトンネル構造がないとき, 周りに引っ張られてトンネル構造が壊れてなくなり, 逆は起こらないという実験事実が確認された (Fig.3.6). これを再現するため,  $\theta(x) = \max\{x, 0\}$ ,  $x \in R^1$  なる関数を用いて  $\theta(\phi_{j+1} - \phi_j) + \theta(\phi_{j-1} - \phi_j)$  を考える. これらを  $f_{int}(\phi_j)$  の項として Eq.(3.6) に取り込むことできる. 以上より, 力学系モデル Eq.(3.1) を得る.

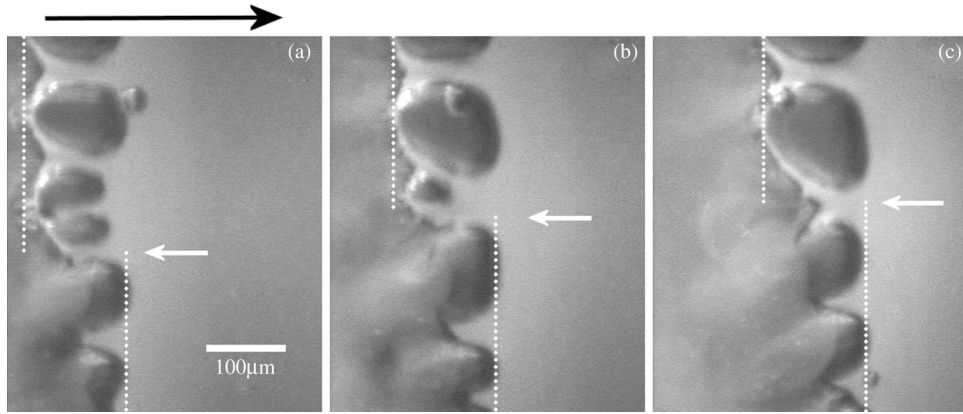


Figure 3.6: トンネル構造近傍のダイナミクス. 剥離状態は (a) から (c) へ進行しており, (b), (c) はそれぞれ (a), (b) から 3 秒後の状態である. また, 各状態において白い矢印によって界面を表しており, 剥離界面の上の部分がトンネル構造が存在している部分, 下の部分がトンネル構造が壊れている部分に対応する. ([70], Fig.17)

ここで, Eq.(3.1) のダイナミクスを簡単に述べる. Eq.(3.1) は, 特徴的な二種類の振る舞いをする.

- (i) 非対称局所的な相互作用が原因となって, 安定点  $\alpha$  にある状態  $\phi_j (\approx \alpha)$  がもう一つの安定点  $\gamma$  へ変化していく. すなわち,  $\phi_j \approx \gamma$  となり, 状態  $\gamma$  の割合が増加する. この  $\phi_j$  の変化は大域的相互作用とノイズには無関係である. よって, もし非対称局所的相互作用のみ状態に作用するならば, たちまち全ての  $\phi_j$  は  $\gamma$  のみとなる.
- (ii) しかしながら,  $\gamma$  に近い値をもつ状態の割合が  $V$  の関数として与えられるある閾値を超えると, 大域的相互作用とノイズの効果により, 確率的に  $\phi_j$  は  $\alpha$  に引き戻される. したがって, 大域的相互作用の存在によって  $\bar{\phi}$  は一定値に保たれる.

この力学系モデルは冒頭で述べた四つの特徴をもつ双安定素子集団のダイナミクスを再現できることが知られており、パラメータ  $V$  を変えることで Fig.3.1 で見たパターンを再現することができる。

ところで、Eq.(3.1)に基づく力学系モデルの性質は、発見的に得られたセルオートマトンモデルによっても表現することができる [76]。本論文では、このセルオートマトンモデルを“Y12”モデルと呼ぶ。Y12モデルにおいて、離散時刻  $n$ , 位置  $j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) の状態  $c_j^n$  は 0 または 1 の値をとる。これは、状態が双安定であることを意味する。また、非対称局所的相互作用として、 $c_j^n = c_{j+1}^n = c_{j-1}^n = 0$  ならば  $c_j^{n+1} = 0$ , それ以外の場合は  $c_j^{n+1} = 1$  となるよう仮定する。これはエレメンタリーセルオートマトンのルール 254 として知られる時間発展ルールと同じである。大域的相互作用とノイズの効果は、以下の確率ルールとして一緒に取り入れられる。今、 $c_j^n$  の  $j$  が 1 から  $N$  までの位置平均  $\bar{c}^n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N c_j^n$  と、この平均値を規制するようなパラメータ  $r$  を考え、以下のルールを与える。確率  $1 - \frac{r}{\bar{c}^n}$  で 1 であった状態は 0 になる。確率  $\frac{r - \bar{c}^n}{1 - \bar{c}^n}$  で 0 であった状態は 1 になる。Y12モデルでは、ある離散時刻  $n$  の状態  $c_j^n$  ( $j = 1, \dots, N$ ) に対してまずエレメンタリーセルオートマトンのルール 254 を適用する。その後、上記の確率ルールを同じ時刻  $n$  の間に適用させる。この手順でセルオートマトンの時間発展規則を考える。Fig.3.7 は、Y12モデルにおいて  $r = 0.1, 0.3$  のセルオートマトンの時空間パターンを表している。このパターンは、Fig.3.1 でみたパターンと統計的に同値であることが示されており [76], それゆえ Y12モデルもまた、非対称局所的及び大域的に相互作用した双安定素子集団のダイナミクスをセルオートマトンとして再現している。さらにこのモデルは、この章の 3, 4 節にて後述されるように、パラメータ  $r$  を Eq.(3.1) における  $V$  とみなすことによって力学系モデルと数学的に関係している。

このように、双安定性、非対称局所的相互作用、大域的相互作用、そしてノイズをもつ現象を再現するモデルとして、Eq.(3.1)に基づく力学系モデルと、エレメンタリーセルオートマトンのルール 254 及び確率ルールに基づくセルオートマトンモデルという、異なる二つのモデルが存在する。すなわち、この現象においては、非線形動力学における微分方程式とセルオートマトンが密接に関係している。しかしながら、これまで Eq.(3.1) からのセルオートマトンモデルの数学的導出は明確になっていなかった。そこでまず、第 2 章で説明した tropical 差分法を用いた超離散化法、及び、確率関数に基づく確率ルールを用いて、Eq.(3.1) から max-plus で構成されている確率モデ

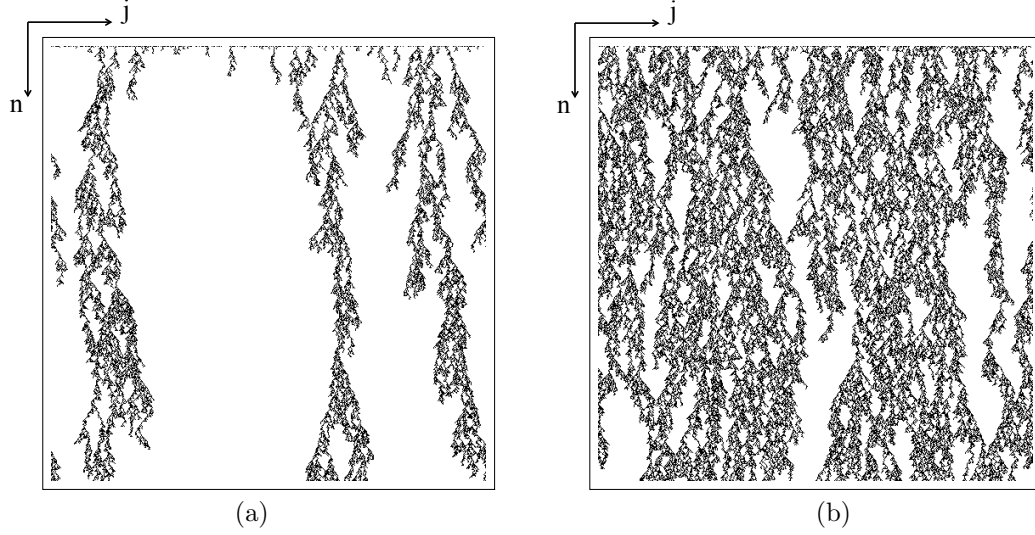


Figure 3.7: Y12 モデルの時空間パターン. (a) :  $r = 0.1$ , (b) :  $r = 0.3$ . 上から下へ時間発展している. (512×512 ステップ)

ルの導出を行う.

### 3.2 超離散方程式及び確率関数に基づく確率セルオートマトンモデルの導出

この節では, 力学系モデルにおける微差分方程式 Eq.(3.1) から, 確率セルオートマトンモデルの導出を行う.

#### 3.2.1 非対称局所的相互作用に対する超離散方程式の導出

最初に, 前節で述べた Eq.(3.1) のダイナミクス (i) に超離散化法を応用する. まず, Eq.(3.1) の右辺第一, 二項に着目し, 以下の差分方程式を考える.

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} = f(\phi_j^n) - g(\phi_j^n) + D\{\theta(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) + \theta(\phi_{j-1}^n - \phi_j^n)\} \quad (3.7)$$

ここで  $f$  と  $g$  は

$$f(\phi) = (\alpha + \beta + \gamma)\phi^2 + \alpha\beta\gamma, \quad g(\phi) = \phi^3 + (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)\phi \quad (3.8)$$

として定義されている. Eq.(3.7) 中の関数  $\theta$  に注意して,  $\phi_{j+1}^n > \phi_j^n$  かつ  $\phi_{j-1}^n > \phi_j^n$  なる場合を考えよう. このとき, Eq.(3.7) は

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} = f(\phi_j^n) - g(\phi_j^n) + D(\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n) \quad (3.9)$$

となる. Eq.(2.41) に対する tropical 差分化と同様に, Eq.(3.9) に対して tropical 差分化を適用すると,

$$\phi_j^{n+1} = w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)} \quad (3.10)$$

なる, 負の項を含まない Eq.(3.9) の差分方程式を得る. ただし,  $w_j^n = \mu(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) + (1 - 2\mu)\phi_j^n$  であり,  $\mu = D\Delta t$  とおいた. 全く同様に, 以下の差分方程式を  $\phi_j$  と  $\phi_{j\pm 1}$  の大小関係の場合分けによって得る.

$$\phi_j^{n+1} = \phi_{j+1}^n \frac{\phi_{j+1}^n + \Delta t f(\phi_j^n)}{\phi_{j+1}^n + \Delta t g(\phi_j^n)}, \quad (\phi_{j+1} > \phi_j, \phi_{j-1} \leq \phi_j) \quad (3.11)$$

$$\phi_j^{n+1} = \phi_{j-1}^n \frac{\phi_{j-1}^n + \Delta t f(\phi_j^n)}{\phi_{j-1}^n + \Delta t g(\phi_j^n)}, \quad (\phi_{j+1} \leq \phi_j, \phi_{j-1} > \phi_j) \quad (3.12)$$

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n \frac{\phi_j^n + \Delta t f(\phi_j^n)}{\phi_j^n + \Delta t g(\phi_j^n)}, \quad (\phi_{j+1} \leq \phi_j, \phi_{j-1} \leq \phi_j) \quad (3.13)$$

これら Eq.(3.10)-Eq.(3.13) の中に負の項は存在しない. したがって, 超離散化の方法を適用することができる. 変数変換

$$\begin{cases} \Delta t = e^{T/\varepsilon} / (\mu^{n+1})^2, & \phi_j^n = \mu^n e^{U_j^n / \varepsilon}, \\ \alpha = \mu^{n+1} e^{A/\varepsilon}, & \beta = \mu^{n+1} e^{B/\varepsilon}, & \gamma = \mu^{n+1} e^{\Gamma/\varepsilon}, \\ (1 - 2\mu)/\mu = e^{M/\varepsilon}, & (1 - \mu)/\mu = e^{M'/\varepsilon} \end{cases} \quad (3.14)$$

を行った後, 超離散極限公式 (2.10) を用いて差分方程式 Eq.(3.10)-Eq.(3.13) を超離散化する. 以下に各場合を示す.

- (i)  $\phi_{j+1}^n > \phi_j^n$  かつ  $\phi_{j-1}^n > \phi_j^n$  の場合. これは変数変換 (3.14) から  $U_{j+1}^n > U_j^n$  かつ  $U_{j-1}^n > U_j^n$  の場合となる. このとき,  $f$  と  $g$  を Eq.(3.10) に代入して

$$\phi_j^{n+1} = w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t \{(\alpha + \beta + \gamma)(w_j^n)^2 + \alpha\beta\gamma\}}{w_j^n + \Delta t \{(w_j^n)^3 + (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)(w_j^n)\}} \quad (3.15)$$

を得る. Eq.(3.15) は, 変数変換 (3.14) を用いて

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \varepsilon \log \left[ \left( e^{U_{j+1}^n / \varepsilon} + e^{U_{j-1}^n / \varepsilon} + e^{(M+U_j^n) / \varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{T/\varepsilon} \left\{ \left( e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + e^{\Gamma/\varepsilon} \right) \left( e^{U_{j+1}^n / \varepsilon} + e^{U_{j-1}^n / \varepsilon} + e^{(M+U_j^n) / \varepsilon} \right)^2 + e^{(A+B+\Gamma) / \varepsilon} \right\} \right] \\ &\quad - \varepsilon \log \left\{ e^{0/\varepsilon} + e^{T/\varepsilon} \left( e^{U_{j+1}^n / \varepsilon} + e^{U_{j-1}^n / \varepsilon} + e^{(M+U_j^n) / \varepsilon} \right)^2 + e^{(A+B) / \varepsilon} + e^{(A+\Gamma) / \varepsilon} + e^{(\Gamma+B) / \varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

と書くことができるので, 超離散極限公式 (2.10) を用いて以下の超離散方程式を得る.

$$U_j^{n+1} = \max\{W_j^n, T + \max(A + 2W_j^n, B + 2W_j^n, \Gamma + 2W_j^n, A + B + \Gamma)\} \\ - \max\{0, T + \max(2W_j^n, A + B, A + \Gamma, B + \Gamma)\} \quad (3.16)$$

ただし,  $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, M + U_j^n, U_{j-1}^n)$  である. ここで, 方程式 (3.16) は Eq.(2.45) において  $F(U) = \max(A + 2U, B + 2U, \Gamma + 2U, A + B + \Gamma)$  と置いたものと同じ形をしており, さらに  $G(U) = \max(3U, A + B + U, A + \Gamma + U, B + \Gamma + U)$  とおき,  $A$  を  $-\infty$ ,  $\Gamma$  を 0 とおけば, 超離散 Allen-Cahn 方程式と同じ形になる. さらに  $A < B < \Gamma$  を考慮すれば, Eq.(3.16) は次のようになる.

$$U_j^{n+1} = \max\{W_j^n, T + \max(\Gamma + 2W_j^n, A + B + \Gamma)\} - \max\{0, T + \max(2W_j^n, B + \Gamma)\} \quad (3.17)$$

その他の場合についても, 同様に計算することにより超離散方程式を導出することができる. 以下にそれらを列挙する.

- (ii)  $U_{j+1}^n > U_j^n$  かつ  $U_{j-1}^n \leq U_j^n$  の場合, 差分方程式 Eq.(3.11) から次の超離散方程式を得る.

$$U_j^{n+1} = \max\{L_j^n, T + \max(\Gamma + 2L_j^n, A + B + \Gamma)\} - \max\{0, T + \max(2L_j^n, B + \Gamma)\} \quad (3.18)$$

- (iii)  $U_{j+1}^n \leq U_j^n$  かつ  $U_{j-1}^n > U_j^n$  の場合, 差分方程式 Eq.(3.12) から次の超離散方程式を得る.

$$U_j^{n+1} = \max\{R_j^n, T + \max(\Gamma + 2R_j^n, A + B + \Gamma)\} - \max\{0, T + \max(2R_j^n, B + \Gamma)\} \quad (3.19)$$

- (iv)  $U_{j+1}^n \leq U_j^n$  かつ  $U_{j-1}^n \leq U_j^n$  の場合, 差分方程式 Eq.(3.13) から次の超離散方程式を得る.

$$U_j^{n+1} = \max\{U_j^n, T + \max(\Gamma + 2U_j^n, A + B + \Gamma)\} - \max\{0, T + \max(2U_j^n, B + \Gamma)\} \quad (3.20)$$

ここで,  $L_j^n = \max(U_{j+1}^n, M' + U_j^n)$ ,  $R_j^n = \max(M' + U_j^n, U_{j-1}^n)$  である. これら四つの方程式 (3.17)-(3.20) が Eq.(3.1) の非対称局所的相互作用項と双安定項に対する超離散化方程式である.

### 3.2.2 双安定性及び セルオートマトンルール 254

次に, 3.2.1 で得られた超離散方程式 (3.17)-(3.20) における双安定性について考察する. ここで, 数学的に定義された超離散方程式における双安定性 (超離散安定性) については, 第4章を参照されたい [77]. 今,  $\phi_j^0 \in [\alpha, \gamma]$  と仮定しよう. すなわち  $A \leq U_j^0 \leq \Gamma$  とする. 加えて, パラメーター  $T$  の条件として,  $T \geq \max\{0, -(A + B + \Gamma)\}$  としよう. このとき, 以下の命題が成り立つ.

[命題] 任意の初期値に対する超離散方程式 (3.17)-(3.20) の解は,  
ある有限時刻の後, 必ず二つの状態に落ち着く.

すなわち,  $\forall U_j^0 \in [A, \Gamma]$  に対して, 最終的に解は  $A$  もしくは  $\Gamma$  となる. このことを証明しよう. Eq.(3.20) の場合について,  $\forall U_j^0 \in [A, \frac{A+B}{2}]$  に対して,

$$\begin{aligned} U_j^1 &= \max[U_j^0, T + \max(\Gamma + 2U_j^0, A + B + \Gamma)] - \max[0, T + \max[2U_j^0, B + \Gamma]] \\ &= \max[U_j^0, T + A + B + \Gamma] - \max[0, T + B + \Gamma] \\ &= T + A + B + \Gamma - (T + B + \Gamma) = A \end{aligned} \quad (3.21)$$

ただし,  $T \geq -(A + B + \Gamma)$  を用いた.  $\forall U_j^0 \in [\frac{A+B}{2}, B]$  に対しては, Eq.(3.21) と同様の計算から,  $U_j^1 = 2U_j^0 - B (< U_j^0)$  を得る. したがって, ある時刻  $n_0$  が存在して  $A < U_j^{n_0-1} < \frac{A+B}{2}$  となる. すると, 次の状態は  $U_j^{n_0} = A$  となる. 同様に,  $U_j^0 < A$  のときも  $A$  に収束することを示すことができる. 続いて,  $\Gamma$  に収束する場合を考えよう.  $\frac{B+\Gamma}{2} < \forall U_j^0 < \Gamma$  を考える. すると

$$\begin{aligned} U_j^1 &= \max[U_j^0, T + \max(\Gamma + 2U_j^0, A + B + \Gamma)] - \max[0, T + \max[2U_j^0, B + \Gamma]] \\ &= \max[U_j^0, T + 3\Gamma] - \max[0, T + 2\Gamma] \\ &= T + 3\Gamma - (T + 2\Gamma) = \Gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

を得る. もし  $\forall U_j^0 \in [B < \frac{B+\Gamma}{2}]$  とすると,  $U_j^1 = 2U_j^0 - B (> U_j^0)$  を得る. したがって,  $A$  に収束する場合と同様に, ある時刻  $n_0$  が存在して  $\frac{B+\Gamma}{2} < U_j^{n_0-1} < \Gamma$  となる. すると, 次の状態は  $U_j^{n_0} = \Gamma$  となる.  $U_j^0 > \Gamma$  の場合も同様であることから, 結局, Eq.(3.20) において, 任意の  $U_j^0$  に対して必ずある有限時刻があり,  $A$  もしくは  $\Gamma$  に収束することが分かった. 続いて Eq.(3.17)-Eq.(3.19) について考える. この場合,  $W_j^n, L_j^n, R_j^n$  の存在によって, Eq.(3.20) において行った議論は多少の修正を受けるだろう. しかしながら, もしパラメーター  $M, M'$  が  $M, M' < A - \Gamma$  なる不等式を満たしていれば, Eq.(3.20) で行った議論とまったく同様に命題を証明することができる. 実際,  $W_j^n \equiv \max\{U_{j+1}^n, U_j^n + M, U_{j-1}^n\} = \max\{U_{j+1}^n, U_{j-1}^n\}, L_j^n = U_{j+1}^n, R_j^n = U_{j-1}^n$

となるため, 上記の議論の  $U_j^n$  を  $W_j^n, L_j^n, R_j^n$  と置き換えることができるためである. 以上で証明が終わる. この証明から, Eq.(3.17)-Eq.(3.20) の解が  $A$  もしくは  $\Gamma$  に収束するというダイナミクスは, 対称であることがわかる.

ここで,  $M, M' < A - \Gamma$  なる不等式の物理的意味を考えるために, **2.3** で述べた Allen-Cahn 方程式, すなわち, Eq.(3.8) を Eq.(2.41) に代入した

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u - (u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) \quad (3.23)$$

なる方程式について考察しよう [78][79]. 拡散係数  $D$  による局所的な効果によって, Eq.(3.23) は  $u = \alpha$  と  $u = \gamma$  とを結びつける単調増加関数を解にもつ. 以下にその導出を述べる. 今, 一定速度  $v$  で進む進行波解を考え, その界面の位置を  $x$  とし,  $z = x - vt$  とおく. この変換を Eq.(3.30) に行うと,

$$-vu' = Du'' - (u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) \quad (3.24)$$

を得る. ここで, 系の対称性を考えて  $u = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha - \gamma)$  と変換すると, Eq.(3.24) は

$$-v\varphi' = D\varphi'' - \frac{1}{4}(\varphi^2 - (\alpha - \gamma)^2)(\varphi + \alpha + \gamma - 2\beta) \quad (3.25)$$

となる. Eq.(3.25) の特別な場合として,  $v = 0, \beta = (\alpha + \gamma)/2$  を考える. Eq.(3.25) は

$$4D\varphi'' = \varphi^3 - (\alpha - \gamma)^2\varphi \quad (3.26)$$

となり, 解として

$$\varphi = \alpha - \gamma \tanh \frac{z(\alpha - \gamma)}{2\sqrt{2D}} \quad (3.27)$$

を得る. また,  $v \neq 0, \beta \neq (\alpha + \gamma)/2$  の時は Eq.(3.27) を仮定して Eq.(3.25) を計算する. 最終的に, 変数を  $u$  に戻して以下を得る.

$$u = \frac{1}{2}[\alpha + \gamma - (\alpha - \gamma) \tanh \frac{z(\alpha - \gamma)}{2\sqrt{2D}}] \quad (3.28)$$

$$v = 3\sqrt{\frac{D}{2}}(\alpha + \gamma) \quad (3.29)$$

解 (3.28) から明らかなように, もし  $D$  を小さくしていけばこの解の  $\alpha$  から  $\gamma$  への上がり方は急激になり, 近似的に  $u$  は  $\alpha$  と  $\gamma$  の二値をとる関数となる. ここで,  $M, M'$  は変数変換 (3.14) によって  $D$  と関連付けられている. したがって,  $A - \Gamma$  は系の状態が双安定かどうかを決める,  $M, M'$  に対する閾値を与えている.

次に, 超離散方程式 (3.17)-(3.20) とセルオートマトンとの対応を考える. 第2章で述べたように, 一般に超離散方程式の解がセルオートマトンとして表せるかどうかはわからない. しかしながら, ここで考えている超離散方程式は,  $A, \Gamma$  に対する双

安定性をもっていることから, この二値を変数としたセルオートマトンへの対応が可能となる. すなわち,  $A, \Gamma, U_j^0$  を整数として定義すると, その後すべての  $j, n$  で  $U_j^n$  は整数となる. Eq.(3.17)-Eq.(3.20) から,  $U_j^{n+1}$  の値はその前の時刻の状態  $U_j^n$  とその両近傍  $U_{j\pm 1}^n$  の状態, すなわち三近傍  $[U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n]$  によって定まる. 例えば, ある時刻  $n$  で  $[U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n] = [\Gamma, A, A]$  としよう.  $U_j^{n+1}$  の値は, Eq.(3.18) に従って  $\Gamma$  となる. 同様の計算によって,  $n$  から  $n+1$  への状態の遷移は以下の表に従うことが示される.

$U_{j+1}^n \ U_j^n \ U_{j-1}^n$	1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
$U_j^{n+1}$	1	1	1	1	1	1	1	0

ここで,  $A = 0, \Gamma = 1$  とおいた. このルールはエレメンタリーセルオートマトンのルール 254 として知られるものと完全に一致している. ここで, Eq.(3.17)-Eq.(3.20) を  $A = 0, B = 1/2, \Gamma = 1, T = 2$  として数値的に解くと, Fig.3.8 となる. これはエレメンタリーセルオートマトンのルール 254 に一致する.

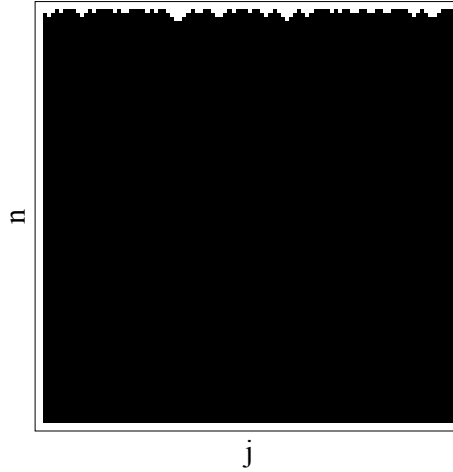


Figure 3.8: 超離散方程式 Eq.(3.17)-Eq.(3.20) の時空間パターン (エレメンタリーセルオートマトンのルール 254). 上から下へ時間発展している. (100×100 ステップ)

以上から, 超離散方程式 (3.17)-(3.20) はエレメンタリーセルオートマトンのルール 254 を直接再現できることが示された. それを  $f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)$  と書くと,  $U_j^n$  の時間発展は

$$U_j^{n+1} = f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n) \quad (3.30)$$

となる.



### 3.2.3 大域的相互作用と確率ルール

3.2.1において超離散化を行った際、大域的相互作用とノイズを無視していた。これは、3.2.1で述べたEq.(3.1)の $\bar{\phi}$ がある閾値を超えないときに起こるダイナミクス(i)である。しかし、非対称局所的な相互作用により $\phi \approx \gamma$ となる状態が増えれば、 $\bar{\phi}$ が閾値を超えてしまう。そうすれば、もはや大域的相互作用とノイズの効果は無視できなくなる。ここで、大域的相互作用の効果は3.2.1で述べたように、双安定状態から $\phi_j = \alpha$ の単安定状態にする。加えて、ノイズ効果があるために、確率的に $\phi_j = \gamma$ の状態が $\alpha$ の状態へと引き戻されることになる。この確率的な効果をEq.(3.30)に取り入れるために、以下の確率関数を定義する[80]。変数 $x$ に対し、 $0 \leq x \leq 1$ ならば

$$\theta_j^n(x) = \begin{cases} U_j^n, & \text{with the probability } x \\ 0, & \text{with the probability } 1 - x \end{cases}$$

また、 $x < 0$ ,  $1 < x$ ならば $\theta_j^n(x) \equiv 0$ と定義する。この確率関数 $\theta_j^n$ を用いて、 $U_j^n$ に対する確率ルールを以下のように定める。まず、Eq.(3.1)における大域的相互作用 $-(\bar{\phi} - V)$ を $-(\bar{U}^n - V')$ として置き換える。ただし、 $\bar{U}^n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j^n$ であり、 $V'(< 1)$ は定数である。その上で、ノイズ $\xi_j$ の効果を考慮するために、 $-(\bar{U}^n - V')$ を $-\theta_j^n(\bar{U}^n - V')$ として修正する。ここで、パラメーター $V'$ は $\bar{U}^n$ の閾値とみなされる。以上より、セルオートマトンのルール254として表されていた非対称局所的相互作用のみの時間発展方程式Eq.(3.30)に、確率関数を用いた大域的相互作用を表す項を合わせて、

$$U_j^{n+1} = f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n) - \theta_j^n(\bar{U}^n - V') \quad (3.31)$$

なる $U_j^n$ の時間発展方程式を得る。これを、力学系モデルEq.(3.1)に対する確率セルオートマトンモデルと呼ぼう。実際、初期値を0, 1に限ると、Eq.(3.31)は0もしくは1の値をとりながら時間発展していく。

上記した大域的相互作用とノイズ項からセルオートマトンへの対応は、数学的には厳密ではないが、後の節で見るように、元の力学系モデルをうまく再現している。また、より正確なセルオートマトンモデルの導出も後の節で行う。そこでは、力学系モデルは、適当な確率関数のみを用いたセルオートマトンモデルとして再現可能であることが示される。

### 3.3 一般化確率セルオートマトンモデルによるパターン形成

前節では、非対称局所的相互作用、及び、大域的相互作用をもつ双安定素子集団の力学系モデル Eq.(3.1) から、超離散化、確率関数を用いて力学系モデルの特徴を反映した確率セルオートマトンモデルの導出を行った。本節では、得られた確率セルオートマトンモデルが力学系モデルを再現できているかどうかを議論する。特に、3.1 で述べた、力学系モデルを再現する発見的に得られたセルオートマトンモデル (Y12 モデル) との比較を行う。そして、確率セルオートマトンモデルの観点からダイナミクスを見直すことで、この素子集団の振る舞いのより根本的な性質を探る。

まず、時間差を考慮して確率セルオートマトンモデルを一般化することから始める。Eq.(3.31) を導く際、非対称局所的相互作用と大域的相互作用とを独立させて差分化を考えていたことに注意しよう。このことは、3.1 で述べたように、力学系モデルにおけるダイナミクス (i) 及び (ii) が互いに独立であるところに依っている。したがって、Eq.(3.31) において非対称局所的相互作用を示す  $f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)$  項と大域的相互作用を示す  $\theta_j^n(\bar{U}^n - V')$  の項は、同じ時刻に作用することはない。力学系モデルのダイナミクスとの類似性を考えるならば、後者の方が遅れて作用することが示唆される。そこで、このことを考慮に入れて、我々は大域的相互作用  $\theta_j^n(\bar{U}^n - V')$  が作用する時刻として、離散時刻  $n'$  を導入する。こうして、時間差を考慮することで次の確率セルオートマトンモデルが得られる。

$$U_j^{n+1} = f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n) - \theta_j^{n'}(\bar{U}^{n''} - V') \quad (3.32)$$

ここで、 $n'$  は今述べたように  $\theta_j^n(\bar{U}^n - V')$  が  $U_j^n$  に作用する時間差を表す離散時刻であり、 $n''$  は確率ルールによって調整される  $\bar{U}^n$  が  $f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)$  の作用を受けかどうかで  $n$  もしくは  $n'$  の値をとる。Eq.(3.32) を一般化確率セルオートマトンモデルと呼ぼう。

次に、Eq.(3.32) を基にして得られるセルオートマトンの時空間パターン形成を考察していく。はじめに、 $n = n' = n''$  とする。このとき、Eq.(3.32) は Fig.3.9 のようなパターンを示す。これは、時間差を考慮しない、すなわち、非対称局所的相互作用と大域的相互作用が同時刻に作用した場合には、適切な時空間パターンは生成されないことを意味している。続いて、 $n'' = n, n' > n$  としよう (この場合を case1 とする)。この場合に Eq.(3.32) によって生み出されるパターンが Fig.3.10 である。ここで、 $\bar{U}^n$  の時間平均はパラメータ  $V'$  に対してほとんど一定値をとることが示される。すなわち、大域的相互作用の物理的意味であった  $V'$  が状態を規制することが示されている。

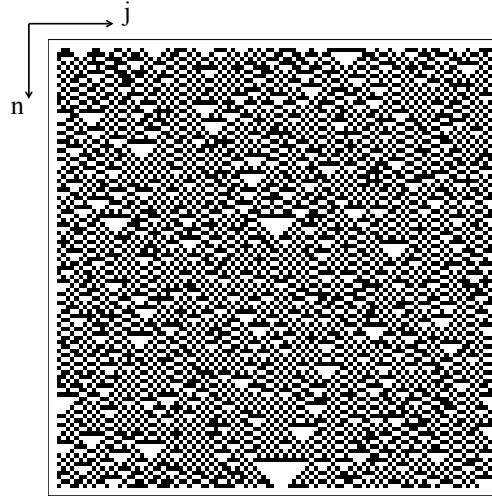


Figure 3.9: Eq.(3.32) の時空間パターン ( $n = n' = n''$ ).  $V' = -0.3$ . 上から下へ時間発展している. (100×100 ステップ)

また, Fig.3.10 と Y12 モデルのパターンである Fig.3.8 とを比べてみると, 非常に類似していることが見て取れる. これは, case1 が Y12 モデル同様, 力学系モデル (3.1) を再現していることを意味する. ここで, 数学的には case1 のセルオートマトンモデルは, 時間差を考慮に入れていなかった確率セルオートマトンモデル (3.31) において, 確率関数を

$$\theta_j^n(x) = \begin{cases} f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n), & \text{with the probability } x \\ 0, & \text{with the probability } 1 - x \end{cases} \quad (3.33)$$

と置いたものに同値である.

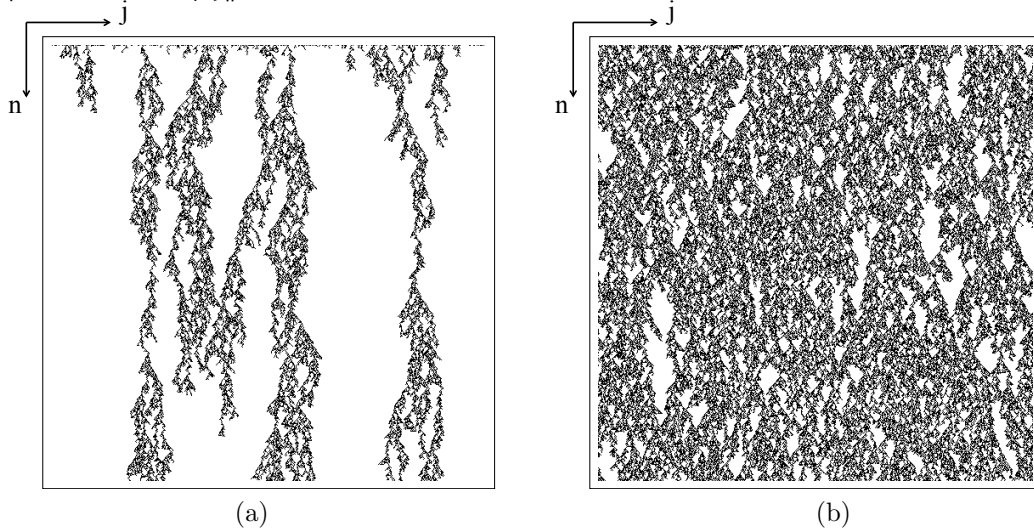


Figure 3.10: case1 の時空間パターン. (a) :  $V' = -0.35$ , (b) :  $V' = -0.01$  上から下へ時間発展している. (512×512 ステップ)

次に  $n' = n''$  とした場合を考える (この場合を case2 とする). このとき現れる時空間パターンは Fig.3.11 となる. case2 のセルオートマトンモデルは, Eq.(3.31) に対して確率関数 (3.33) を定義し, さらに  $\bar{U}^n$  を  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)$  で置き換えたものと数学的に同値である. すなわち, case2 は確率関数  $\theta_j^n$  の変数  $\bar{U}^n$  における時刻に関して, case1 と異なっている. しかしながら, case1 で得られた時空間パターン Fig.3.10 と case2 で得られた時空間パターン Fig.3.11 は非常に類似している. これはまた, case2 の Y12 モデルとのつながりを示唆する. したがって, Eq.(3.1) のダイナミクスを再現するモデルが三つ得られたことになる. 一つ目は, 発見的に得られた Y12 モデルであり, 二, 三つ目は一般化確率セルオートマトンモデル (3.32) から得られるモデル case1, case2 である.

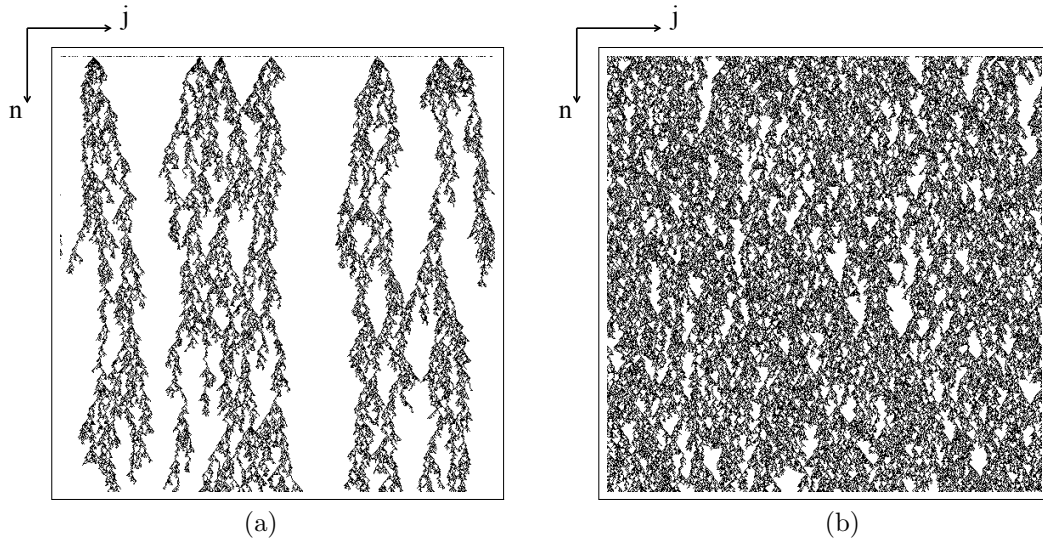


Figure 3.11: case2 の時空間パターン.(a) :  $V' = -0.116$ , (b) :  $V' = 0.35$ . 上から下へ時間発展している. (512×512 ステップ)

これらのモデルにおける類似点, 相違点を詳しく見ていこう. Y12 モデルにおいて,  $\bar{U}^n$  の時間平均はおおよそ  $V'$  に等しいことが知られている. 一方, Eq.(3.32) に基づく case1, 2 においては, それらの確率ルールが Y12 と異なるため,  $\bar{U}^n \approx V'$  である必要はない. 事実, case1, 2 における  $\bar{U}^n$  と  $V'$  の関係を, Fig.3.12 に示した. case1 (a) の場合,  $\bar{U}^n$  の時間平均は  $V'$  に一対一対応していることがわかる. しかし,  $V' (< 1)$  の値は  $\bar{U}^n$  の時間平均より小さく, 等しくない. また, case2 (b) の場合においては, もはや  $\bar{U}^n$  の時間平均と  $V'$  とが一対一対応しない. すなわち, 0 から約 0.15 まで,  $V'$  に対して  $\bar{U}^n$  は値をもたない. したがって,  $\bar{U}^n$  の時間平均と  $V'$  との関係を考慮することによって, 三つのモデルの明確な違いを示すことができる.

今度は, 三つのモデルの類似点に着目しよう. Y12 モデルにおいて得られる時空

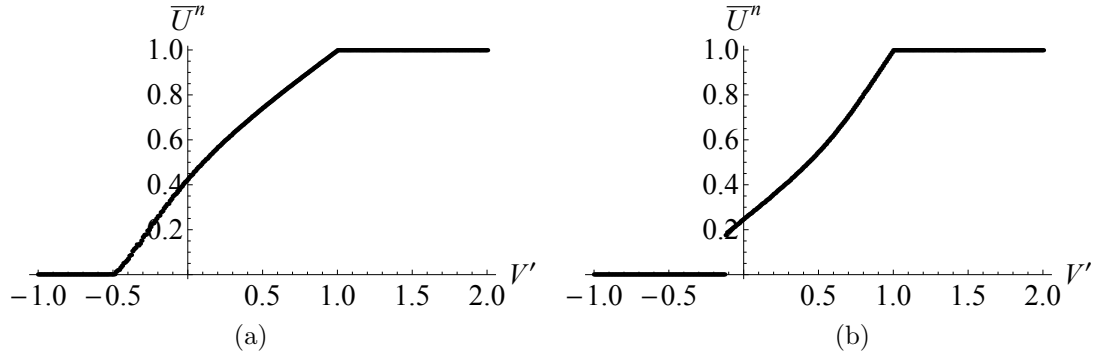


Figure 3.12:  $\bar{U}^n$  の時間平均と  $V'$  との関係 ; (a) は case1, (b) は case2 が対応している. 横軸が  $V'$  であり, 縦軸が  $\bar{U}^n$  の時間平均

間パターンは, パーコレーションの手法 [81][24] により解析されるいくつかの特徴量をもつことが知られている. 各モデルから得られる時空間パターンが視覚的に類似していることから, case1, 2 におけるパターンの特徴量は, Y12 におけるものとおおよそ近い値が得られると考えられる. 以下それを見よう. 時空間パターン中の白色のクラスタに着目すると, Y12 モデルでは  $V' \approx 0.275$  のとき, 白色のクラスターが上から下までつながる. このことをパーコレートするといひ, このときの  $V'$  の点をパーコレーション閾値という. 同様に, case1 では  $V' \approx -0.181$  で, case2 では  $V' \approx 0.037$  でそれぞれパーコレートする. パーコレート閾値での, Y12 モデル, case1, 2 の時空間パターンを Fig.3.13 に示す.

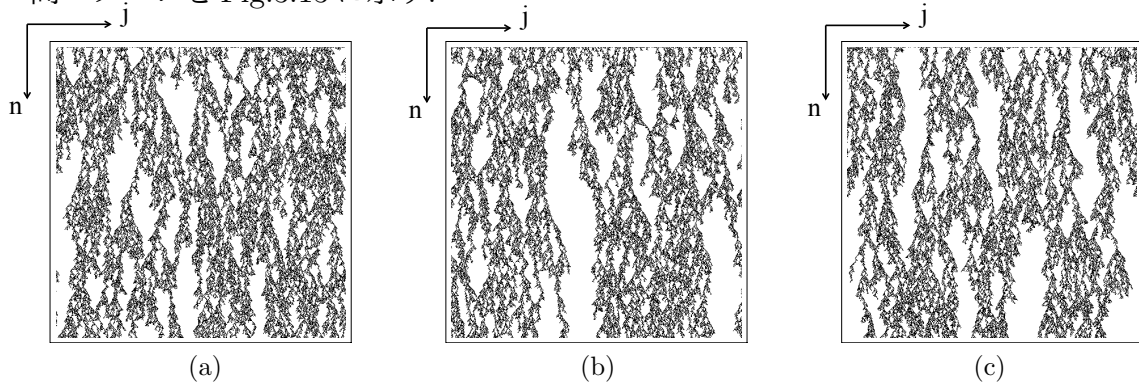


Figure 3.13: Y12, case1, 2 のパーコレートした時空間パターン. 各パーコレーション閾値は Y12 で  $r = 0.27$ (a), case1 で  $V' = -0.18$ (b), case2 で  $V' = 0.037$ (c). 上から下へ時間発展している. (512×512 ステップ)

このとき, 各パターンにおけるフラクタル次元を求めてみる. Y12 モデルにおいて Box counting 法によるフラクタル次元  $D$  を導出すると,  $D \approx 1.70$  となることが知られている. 同様に, case1, 2, においてフラクタル次元は, それぞれ約 1.68, 1.67 であることが分かった (Fig.3.14).

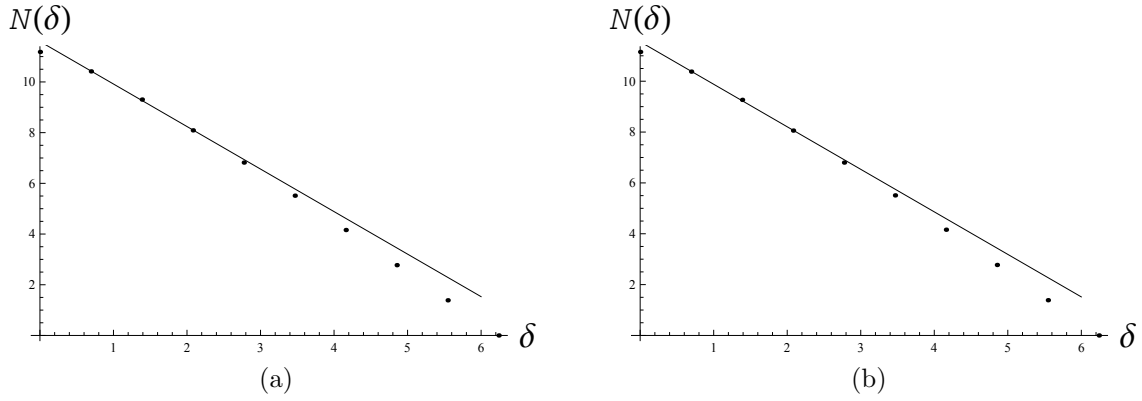


Figure 3.14: (a) は case1 のパターン Fig.3.10 のフラクタル次元. (b) は case2 のパターン Fig.3.11 のフラクタル次元.  $\delta$  はボックスのサイズ.  $N(\delta)$  はサイズ  $\delta$  のボックスの個数.

確率ルールの違いのため, 各場合におけるパーコレーション閾値は互いに異なっているにもかかわらず, セルオートマトンパターンのフラクタル次元はおおよそ一致していることが分かる. その他の特徴量については以下の表にまとめた. ここで,

Table 3.1: パーコレーション閾値における Y12 モデル, case1, case2 の時空間パターン, 粘着テープ剥離実験におけるパターンについての統計量の比較.

	$\xi$	$D$	$\nu_{\perp}$	$\nu_{\parallel}$
Y12 $r=0.27$	0.85	1.70	0.58	0.41
case1 $V'=-0.181$	0.85	1.68	0.63	0.39
case2 $V'=0.037$	0.84	1.67	0.61	0.39
peeling, $V=0.45\text{mm/min}$	0.71	1.54	0.60	0.44
peeling, $V=0.48\text{mm/min}$	0.85	1.70	0.59	0.45

$V'$  はパーコレーション閾値,  $\zeta$  はクラスターサイズ  $s$  に対する累積度数分布  $F(s)$  のべき次数 ( $F(s) \sim s^{-\zeta}$ ),  $D$  はフラクタル次元,  $\nu_{\perp}$ ,  $\nu_{\parallel}$  は各クラスター  $s$  に対する標準偏差の高さ  $h(s)$ (height) と広がり  $w(s)$ (width) の関数のべき次数 ( $\sim s^{-\nu}$ ) である. また, 表の一番下の二つの段は, 粘着テープ剥離実験において現れる実際のパターンについて求めたものである. この結果を見ても, case1, 2, Y12 モデルによって得られるセルオートマトンパターンはほとんど同じ特徴量をもっている.

以上をまとめる. 一般化したセルオートマトンモデル (3.32) は, 時間差をどう考慮するかによって異なる確率ルールから成る二つの case1, 2 をもつが, その両場合において, 非対称局所的相互作用及び大域的相互作用をもつ双安定素子集団の特徴的なダイナミクスが描写された. 数学的には, 時間差の効果は, Eq.(3.1) から Eq.(3.32) を差分化して導出する際に重要になってくる. それにもかかわらず, 統計的に見ると

この効果は力学系モデルの特徴を表現する時空間パターン生成に対してさほど影響を及ぼさない。

### 3.4 確率セルオートマトンモデルから見た大域的相互作用

3.2 では、非対称局所的相互作用及び大域的相互作用をもつ双安定素子集団の現象に対し、既に知られている力学系モデルから、超離散化並び確率関数を用いて確率セルオートマトンモデルを導出した。その際、数学的厳密さはあまり考慮せず、元の微分方程式のダイナミクスに着目して導出を行った。また 3.3 では、3.2 で得られた確率セルオートマトンモデルから、時間差を考慮した一般化確率セルオートマトンモデルを考え、そのセルオートマトンダイナミクスを考察した。本章では、特に 3.3 から導き出された結果を用い、3.2 で行った力学系モデルから確率セルオートマトンモデルへの導出を再度見直す。そして、ある仮定に基づけば、素子集団のダイナミクスを再現する確率セルオートマトンモデルでその統計的性質が全て同じになるようなものは数多く作ることができることを示す。さらに、それらのモデルの中で最も簡単な確率セルオートマトンモデルとして、大域的相互作用のみで表現されているようなセルオートマトンモデルの存在を示し、その統計的性質を述べる。

Eq.(3.1) に対して、以下の二つの点で超離散化の方法を適用することは出来ない。まず、Eq.(3.1) の第三項目、大域的相互作用を表す部分にマイナスがある。第 2 章で述べたように、超離散化には負の問題が存在する。このため、この  $-(\bar{\phi} - V)$  の項の存在は超離散化を困難にする。さらに、この項には平均値  $\bar{\phi}$  が存在するが、これもまた、超離散化の際に問題が起こる。一般に、 $\bar{x} \equiv \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)$  に対して超離散化を行うと、 $\bar{X} = \max\{X_1, \dots, X_N\} - N'$  なる項が現れる。ただし、 $x_i = e^{X_i/\varepsilon} (i = 1, \dots, N)$ ,  $N = e^{N'/\varepsilon}$ ,  $\bar{x} = e^{\bar{X}/\varepsilon}$  なる変数変換を用いた。このとき、 $X_i \in \{0, 1\} (i = 1, \dots, N)$  を仮定したとき  $\max$  の性質から  $X_1, \dots, X_N$  中の “1” の個数の情報は消え、ただ “1” をとるかとらないかのみが  $\bar{X}$  に影響する。すなわち、 $x_i$  の平均である  $\bar{x}$  と、超離散化後の  $\bar{X}$  との意味が大きく異なってしまう。この二つの問題点が大域的相互作用を考えた超離散化を行う際に問題となる。3.2.1 において非対称局所的相互作用と大域的相互作用を分けて考えたのは、今述べた理由も関係している。しかしながら、3.3 の結果を用いて、この二つの問題の解決の糸口を見出すことができる。以下で非対称局所作用と大域的相互作用とを分けることなく、確率セルオートマトンモデルの導出を試みよう。

まず, Eq.(3.1) に対して, **3.2.1** で行った議論と同様に第一, 二項目に tropical 差分化を施し, 三項目以降には通常の差分化を行う. ここでは簡単のため  $\phi_{j\pm 1} > \phi_j$  の場合を説明する. ただし, 他の場合もまったく同じように行う. すると

$$\phi_j^{n+1} = w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)} - \Delta t (\bar{\phi}^n - V) + \Delta t \xi_j^n \quad (3.34)$$

なる差分方程式を得る. ここで,  $f, g$  は Eq.(3.8) を満たす. 今,  $s_j^n = \Delta t (\bar{\phi}^n - V - \xi_j^n)$  とおくと, Eq.(3.34) は

$$\phi_j^{n+1} = w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)} \left( 1 - \frac{s_j^n}{w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)}} \right) \quad (3.35)$$

となる. ここで,  $w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)} \sim w_j^n$  に注意すると, **3.2.2** に述べたことから, Eq.(3.1) の  $D$  を大きくとれば  $w_j^n$  が大きくなる. したがって

$$s_j^n \ll w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)} \quad (3.36)$$

と仮定できる. すると公式  $(1 - x) = (1 + x)^{-1}, x \ll 1$  から

$$\phi_j^{n+1} = w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)} \left( 1 + \frac{s_j^n}{w_j^n \frac{w_j^n + \Delta t f(w_j^n)}{w_j^n + \Delta t g(w_j^n)}} \right)^{-1} \quad (3.37)$$

なる差分方程式を得る. Eq.(3.37) には負の項がないことに注意しよう. したがって, 変数変換を行えば, Eq.(3.37) は超離散方程式へ変換されることになる.

この変換を行う前に,  $s_j^n$  について見てみる. 上記したように,  $s_j^n$  の中には  $\bar{\phi}^n$  があり, 超離散化を困難にしている. しかしながら, 先行研究において, Eq.(3.1) の  $\bar{\phi}$  は, 初めに非対称局所的相互作用が効いたのち, 大域的相互作用の影響が出るころには (**3.1** 中の Eq.(3.1) のダイナミクス (ii)) ほとんど一定値をもつことが知られている. この事実は, **3.1** の (i), (ii) のダイナミクスをまとめた一般化確率セルオートマトンモデル (3.32) においても見られる. **3.3** の Fig.3.12 では, Eq.(3.32) の case1, 2 において  $V'$  の変化と  $\bar{U}^n$  の時間平均との関係を示した. また, Y12 モデルでは,  $V'$  は  $\bar{U}^n$  の時間平均とほぼ同じ値をもっていた. このとき, 各モデルにおいて  $V'$  を与えたえれば,  $\bar{U}^n$  は離散時間  $n$  に対してほぼ  $\bar{U}^n$  の時間平均に一致しながら発展していることが示される. 特に, 三つのモデルの統計的性質が同値であることを示すために用いたパーコレーション閾値は各モデルにおいて異なっている事はすでに Table.4.1 で述べたが, パーコレートしたときの  $\bar{U}^n$  はほぼ 0.27 をとる. したがって, 確率を  $\bar{U}^n - V'$



として入れている限り, 確率関数によらず  $\bar{U}^n$  がおよそ 0.27 のところで, 素子集団のダイナミクスをセルオートマトンとして再現することが可能であると思われる.

これらの事実を考慮して, Eq.(3.37) に変数変換

$$s_j^n = \exp(\psi_j^n(V')/\varepsilon) \quad (3.38)$$

と Eq.(3.14) を行う. ここで,  $\psi_j^n$  に対しては次を仮定する.

[仮定]  $\psi_j^n$  は与えられた  $V'$  に対して  $\bar{U}^n$  を一定にする確率関数である.

そして, 超離散極限を取ることで,

$$U_j^{n+1} = f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n) - \max\{0, \psi_j^n(V') - f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)\} \quad (3.39)$$

なる超離散方程式を得る. ここで,  $f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)$  は Eq.(3.30) の記号を用いた. これが, 非対称局所的な相互作用及び大域的相互作用を分けず, 統一的に超離散化を行った結果得られる方程式である. この方程式は,  $\psi_j^n$  を上記の仮定を満たしつつ適当にとれば **3.2.2** で行った議論を用いてセルオートマトンに対応付けることが可能である. 例えば,  $\psi_j^n$  を以下のように定義しよう.

$$\psi_j^n(V') \equiv \tilde{\theta}_j^n(\bar{U}^n - V') \quad (3.40)$$

ただし,  $\tilde{\theta}_j^n(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  のとき

$$\tilde{\theta}_j^n(x) = \begin{cases} 2f_{254}(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n), & \text{with the probability } x \\ 0, & \text{with the probability } 1 - x, \end{cases} \quad (3.41)$$

$x < 0, 1 < x$  のときは  $\tilde{\theta}_j^n(x) = 0$  とする. この確率関数 Eq.(3.40), (3.41) を用いた Eq.(3.39) の時間発展はセルオートマトンとして表現される. このとき,  $\bar{U}^n$  の値は各時刻で約 0.27 をとるため, 上記の仮定を満たしている. そして, このセルオートマトンダイナミクスは, 数学的には **3.3** で述べた Eq.(3.32) の case1 に等価であることが示される. すなわち,

$$U_j^{n+1} = f_{[254]}(U_{j\pm 1}^n, U_j^n) - \max\{0, \tilde{\theta}_j^n(\bar{U}^n - V') - f_{[254]}(U_{j\pm 1}^n, U_j^n)\}$$

はセルオートマトンモデル case1 に同値である.

実際, case1 では, Eq.(3.32) と確率関数 Eq.(3.33) を用いれば, 確率  $x \equiv \bar{U}^n - V'$  で  $U_j^{n+1} = f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) - f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) = 0$ , 確率  $1 - x$  で  $U_j^{n+1} = f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n)$  であった. 一方, Eq.(3.39) は確率  $x$  で,  $\psi_j^n(V') - f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) = 2f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) -$

$f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) = f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) \geq 0$  となるから,

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) - \max\{0, \psi_j^n(V') - f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n)\} \\ &= f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) - f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) = 0. \end{aligned}$$

また, 確率  $1-x$  で  $U_j^{n+1} = f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) - \max\{0, 0 - f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n)\} = f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n)$ .  
ただし  $0 - f_{254}(U_j^n, U_{j\pm 1}^n) \leq 0$  を用いた. 以上から, 両モデルが同値であることが示された. したがって, Eq.(3.39) のセルオートマトンパターンは Fig.3.10 と統計的に等価となる.

また例えば, Eq.(3.41) の  $f_{254}$  を, エレメンタリーセルオートマトンのルール 250 に従う関数  $f_{250}$  に置き換えた確率関数を用いて Eq.(3.40) として定義すれば, **3.3** でみた確率セルオートマトンモデルと同じ時空パターンを再現する. そして, この場合にも Eq.(3.39) は case1 と同値であることが示される. このように, 特に関数  $\psi$  は  $f_{254}$ , すなわちエレメンタリーセルオートマトンのルール 254 に関係するものでなくてもよい. なお, case2 についても同様の議論を行うことができる. 実際,

$$\psi_j^n(V') \equiv \hat{\theta}_j^n\left(\frac{1}{N} \times f_{254} - V'\right) \quad (3.42)$$

と定め, 確率関数として Eq.(3.41) を用いたものを考えれば, この超離散方程式は case2 に同値であることが示される.

以上から, 上記の [仮定] に基づく関数  $\psi$  を用いた超離散方程式 Eq.(3.39) は, 確率セルオートマトンダイナミクスとして, 非対称局所的相互作用及び大域的相互作用を持った双安定素子集団現象のダイナミクスを再現できると思われる. この「確率関数は上記の [仮定] に基づいてさえいけば任意性がある」という考えを推し進めると, 確率関数のみで定義されたモデルで, 双安定素子集団のダイナミクスを再現できないかという問題が提起される. この問題に対する解答として, 以下の簡単な確率セルオートマトンモデルを考える.

$$U_j^{n+1} = \check{\theta}_j^n(\bar{U}^n - V') \quad (3.43)$$

ただし, 確率関数  $\check{\theta}(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  のとき

$$\check{\theta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{with the probability } x \\ 1, & \text{with the probability } 1 - x \end{cases} \quad (3.44)$$

$x < 0, 1 < x$  のとき,  $\check{\theta}_j^n(x) \equiv 0$  とする. さらに,  $U_j^n = U_{j\pm 1}^n = 0$  のときも  $\check{\theta}_j^n(x) \equiv 0$  を課すものとする. Eq.(3.43) は Fig.3.15 の時空間パターンを生成する.

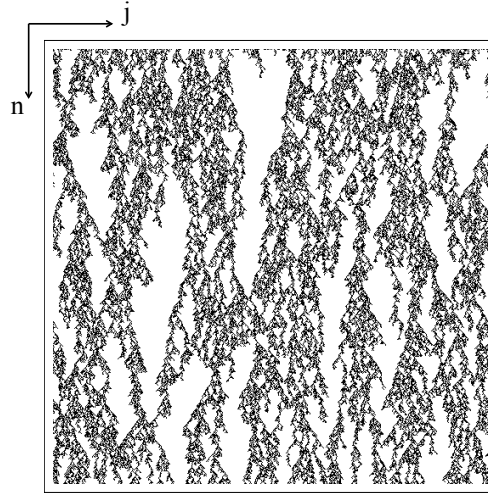


Figure 3.15: Eq.(3.43) の時空間パターン (パーコレート状態).  $V' = -0.181$ . 上から下へ時間発展している. (512×512 ステップ)

このパターンは **3.3** で見た一般化確率セルオートマトンモデルの case1, 2 のパターン Fig.3.13 の (b), (c)(したがって Y12 モデルのパターン (a)) に似ている. 実際, Fig.4.2 のフラクタル次元  $D$  は約 1.68 となることが示されるので, 統計的にも Fig.3.13 と同じパターンであることがわかる. また, このときの  $\bar{U}^n$  も各時刻で約 0.27 の値をもつ. Eq.(3.43) は, 確率関数 (3.44) に大きく依存したセルオートマトンモデルである. 注意として,  $U_j^n = U_{j\pm 1}^n = 0$  のときは確実に  $U_j^{n+1} = 0$  となる一方,  $U_j^n = U_{j\pm 1}^n = 1$  ならば確率的に  $U_j^{n+1} = 1$  となるため, 非対称要素が全くないわけではない. しかしながら, この非対称性は力学系モデルにおける非対称局所的相互作用 (Eq.(3.1) の第二項目) の拡張になっているわけではない. 結果的に, 確率関数 Eq.(3.44) の効果が主である, 双安定素子集団のダイナミクスを再現する確率セルオートマトンモデルが存在するのである.

ここで, 力学系モデルと今得られた結果を比較しよう. 確率セルオートマトンモデルでのパターン形成において, Eq.(3.39) の確率関数  $\psi_j^n(V')$  を  $\bar{U}_j^n$  が一定となりながら時間発展するものとして定めることが本質であり, もしある確率ルールを定めたとすると,  $\bar{U}^n \sim 0.27$  での時空間パターンは全て同じ統計的性質をもつと推測される. そして, この時空間パターン形成は確率関数の定義, すなわち大域的相互作用が本質であり, その最たる例として Eq.(3.43) の存在を示した. 一方, 力学系モデル (3.1) では, 非対称局所的相互作用が必要である. 実際に, そのダイナミクスとして **3.1** の (i) で述べたように, はじめに 0 から 1 へ向かう効果が必要である. さらに, 力学系モデルでの非対称局所的相互作用は, そもそも粘着テープ剥離実験におけるトンネル現象 (Fig.3.3) の再現が基となっている. したがって, 力学系モデルにおいては確かに非対称局所的相互作用及び大域的相互作用が競合して双安定素子集団のダ

イナミクスを生成する.

この節を終える前に, 超離散方程式 (3.39) によって記述される確率セルオートマトンモデルと Domany-Kinzel モデル [82][83] との簡単な比較を行う. まず, Domany-Kinzel モデルについて, 文献 [84] に従って次のように定義する.

今, 一次元セルオートマトンを考え,  $d_n^A \subset \mathbf{Z}$  を  $A \subset \mathbf{Z}$  から出発する時刻  $n$  での粒子の存在する場所の集合として, 時間発展ルールを

$$P(x \in d_{n+1}^A | d_n^A) = f(|d_n^A \cap \{x, x+1\}|) \quad (3.45)$$

として与えよう. ここで  $P(A|B)$  は, 事象  $B$  のもとで事象  $A$  が起こる条件付き確率であり,

$$f(0) = 0, f(1) = p, f(2) = q \quad (3.46)$$

として  $f$  を定める. ただし,  $p, q \in [0, 1]$  はパラメータである. また, 集合  $X$  に対し  $|X|$  は集合の濃度である. このとき, Eq.(3.45) で与えられている確率セルオートマトン, または一次元の離散時間マルコフ過程を (パラメータ  $(p, q)$  の) Domany-Kinzel モデルと呼ぶ. ここで,  $d_n^A(x)$  を以下で定義する.

$$d_n^A(x) = \begin{cases} 0, & x \in d_n^A \\ 1, & x \notin d_n^A \end{cases} \quad (3.47)$$

記号  $d_n^A(x)$  を用いると, Domany-Kinzel モデルを

$$P(d_{n+1}^A = a | d_n^A = b | d_{n+1}^A = c) = \frac{1}{2}(1 - (2a - 1))(1 - 2p(b + c) + 2(2p - q)bc) \quad (3.48)$$

として書き直すことができる. ただし,  $a, b, c \in \{0, 1\}$  である. 特に,  $q = 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$  を満たすとき有向ボンド・パーコレーションに,  $q = p$  のときは有向サイト・パーコレーションにそれぞれ一致する [81]. また, 一般に  $p = p_s p_b, q = p_s \{2p_b - p_b^2\}$  となっているとき, 混合型有向サイト・ボンド・パーコレーションとなる.

さて, 上記した Domany-Kinzel モデルは, 次の超離散方程式と等価であることが知られている [85].

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = & X_j^n \{2 \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - \max(0, U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)\} \\ & + Y_j^n \{\max(0, U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n)\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

ここで,  $X_j^n, Y_j^n$  はそれぞれ,

$$X_j^n = \begin{cases} 1 & (p = p_1) \\ 0 & (p = 1 - p_1) \end{cases}, \quad Y_j^n = \begin{cases} 1 & (p = p_2) \\ 0 & (p = 1 - p_2) \end{cases} \quad (3.50)$$

で与えられる. 注意として, Eq.(3.50) の  $p_1, p_2$  が Eq.(3.46) の  $p, q$  に対応している. ここで,  $U_j^n \in \{0, 1\}$  とすると, Eq.(3.50) は確率エレメンタリーセルオートマトンとなり, 以下の時間発展ルールを構成する.

1.  $U_{j+1}^n = U_{j-1}^n = 0$  ならば  $U_j^{n+1} = 0$
2.  $U_{j+1}^n = 0, U_{j-1}^n = 1$  または  $U_{j+1}^n = 1, U_{j-1}^n = 0$  ならば  $U_j^{n+1} = X_j^n$
3.  $U_{j+1}^n = U_{j-1}^n = 1$  ならば  $U_j^{n+1} = Y_j^n$

例えば,  $p_1 = 0.85, p_2 = 0.20$  として, Domany-Kinzel モデルの時間発展を考えると, Fig.3.16(a) のようになる. ただし, 初期値として一点のみ 1 である状態をとった. 今,  $p_1 = p_2 = 1 - (\bar{U}^n - V')$  とおいて, Eq.(3.49) と Eq.(3.39) に確率関数として Eq.(3.40), Eq.(3.41) を代入したものと比較してみる. すると  $U_{j+1}^n = U_{j-1}^n = 0, U_j^n = 1$  の時,  $U_j^{n+1}$  が 1 をとるか 0 をとるかのみ違いがあるだけで, 後は同じルールに従って時間発展することが示される. すなわち, Domany-Kinzel モデルにおいて, ある時刻から次の時刻への時間発展を決める変数は  $U_{j+1}^n$ , 及び  $U_{j-1}^n$  であるのに対し, 確率セルオートマトンモデル Eq.(3.39) では,  $U_{j\pm 1}^n = 0$  の場合は系の時間発展が  $U_j^n$  の値に関係し, 違いが生じる. 実際に確率セルオートマトンモデル (3.43) の時間発展 (Fig.3.16 (b)) と比べてみると, 両者の違いが見て取れる. したがって, 確率セルオートマトンモデル Eq.(3.39) は Domany-Kinzel モデルに部分的に含まれているが, 両者の唯一の違いである  $U_{j\pm 1}^n = 0$  状態に対する  $U_j^n$  の影響のために, 得られるパターンが僅かに異なる. 両モデルの類似点及び相違点については, 今後の研究で明らかにしていく必要がある.

以上をまとめる. 大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団のダイナミクスは, 力学系モデルでも, 確率セルオートマトンとしても再現可能である. この二つのモデルは超離散化法によって結びついており, これによって, 微分系での力学系モデルと差分系でのセルオートマトンモデルとの数学的対応関係は示された. しかしながら, 物理的な問題として, 双安定素子集団のパターン現象のダイナミクスを決める大域的相互作用と非対称局所的相互作用との関係づけを考える必要が出てきた. 力学系モデルでは, この二つの相互作用が競合してパターンを形成するのに対し, 確率セルオートマトンモデルでは大域的相互作用の効果が主となってパターンを形成できるためである. 今後, この関係性を考えるとともに, Domany-Kinzel モデルのような確率過程のモデルと大域的かつ非対称局所的な相互作用をもつ確率セルオートマトンモデルとの関係性についても研究課題としたい. 本章の研究は超離散

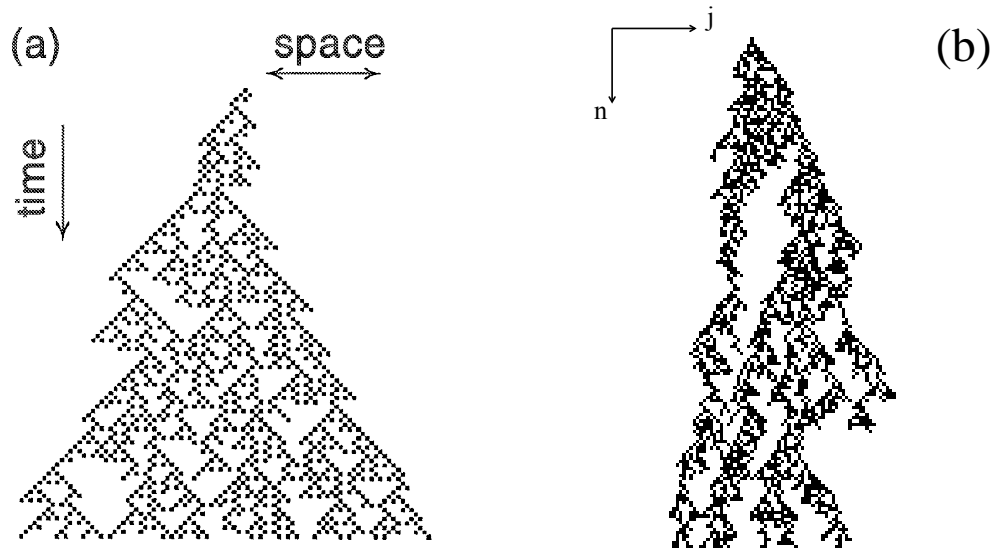


Figure 3.16: (a) Domany-Kinzel モデルの時間発展.  $p_1 = 0.85, p_2 = 0.20$ . (b) (3.43) の時間発展.  $V' = -0.35$ . 上から下へ時間発展している. (150×150 ステップ)

化を通してパターン形成現象見直すことで, 新たな観点から現象を解明する一例となったと思われる.

## Chapter 4

# 反応拡散系における超離散方程式

本章では, ある反応拡散系から導出される連立超離散方程式の解の特徴と, セルオートマトンとの関係性を示す.

### 4.1 Introduction

諸言でも述べたように, 反応拡散系の中にはセルオートマトンと関係性を持つものが存在する. この微分方程式の解の中にセルオートマトンで表現できるものがあるという事実は, 元の微分方程式と差分モデルであるセルオートマトンとの間に何らかの数学的構造関係が存在することを示唆しており, この観点も含め, 特に応用数学の方面から反応拡散系 (連立放物型偏微分方程式系) の解の研究が進められている [86]-[89]. また, 反応拡散系の超離散化の研究としても, まず Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応 [90]-[92] に見られるパターンを再現する max-plus モデルの研究があり [38], 近年には tropical 差分法を用いた Gray-Scott (GS) model [93] の超離散化の研究が進められている [41]. これらの研究から得られている超離散モデルは, いずれも超離散方程式の連立系で表現されている.

ここで, 例として BZ 反応を再現するために考案された max-plus モデルについて簡単に述べよう [38][94][95]. このモデルは, セルオートマトンとして解を表現できることが知られており, 次の連立方程式で与えられる.

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{t+1} &= \max\{U_{i-1,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i,j-1}^t, U_{i,j+1}^t, U_{i,j}^t\} - V_{i,j}^t \\ V_{i,j}^{t+1} &= U_{i,j}^t \end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし,  $-\infty < i, j < \infty$  とし,  $|i|, |j| \rightarrow \infty$  で  $U_{i,j}^t \rightarrow 0$  を仮定する. Eq.(4.1) は, 離散時刻  $t$ , 離散位置  $i, j$  に対し状態変数  $U = U_{i,j}^t$  と  $V = V_{i,j}^t$  なる二次元系で記述されるモデルである. ここで,  $\max\{U_{i-1,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i,j-1}^t, U_{i,j+1}^t, U_{i,j}^t\}$  は  $U$  の拡散効果を表している. これは, Eq.(2.26) を二次元で考えたものである. 2.2 の ex.2 で述べたよう

に, もし  $U_{i,j}^t \in \{0, 1\}$  とすると, この拡散効果によって “1” の値が周りに広がっていく. 次に,  $V$  の効果を考えると, Eq.(4.1) の第二式から時間差  $t = 1$  遅れで  $V$  が  $U$  に変わり, 第一式の拡散効果を抑える. すなわち,  $U$  が増加するに伴って増加し,  $U$  の増加を抑制する. したがって, Eq.(4.1) において  $U$  は活性化因子,  $V$  は抑制因子に似た働きをする. この点を見れば, Eq.(4.1) は BZ 反応を含めた反応拡散系のダイナミクスに類似している [96].

また, このモデルを一次元に制限すると, 進行波やソリトンのような振る舞いをもつ解を得ることができる. これは, 後に述べる反応拡散系から得られる超離散モデルと, 進行波やソリトン解をもつという点で関係し合っていると思われる. 一次元系で Eq.(4.1) は

$$U_{i,j}^{t+1} = \max\{U_{i-1}^t, U_{i+1}^t, U_i^t\} - U_{i,j}^{t-1} \quad (4.2)$$

なる簡潔な方程式になる. ただし,  $V_j^t = U_j^{t-1}$  を用いた. この  $U$  に関する方程式 (4.2) は, 時間についての二階の方程式となるため, 進行波解の存在が予想される. 今, 速さ  $\pm 1$  の進行波を仮定して  $U_j^t = U_{i \pm t}$  とおこう. Eq.(4.2) から

$$U_{i+1} + U_{i-1} = \max\{U_{i-1}, U_{i+1}, U_i\} \quad (4.3)$$

なる差分方程式を得る. これは, 解として  $[U_{j-1}, U_j, U_{j+1}] = [0, a, a], [a, a, 0], [0, a, a+b], [a, a+b, b], [b, a+b, a], [a+b, a, 0] (a, b \geq 0)$  を持つ. これにより, 例えば  $[U_{j-1}^0, U_j^0, U_{j+1}^0] = [1, 1, 0], [U_{j-1}^1, U_j^1, U_{j+1}^1] = [0, 1, 1]$  なる初期状態を与えれば, Eq.(4.3) から, 状態  $\{1, 1\}$  を保ちながら右へ進む進行波解を得る (Fig.4.1). また, Eq.(4.2) はソリトンの振る舞いを示す解も持つ.

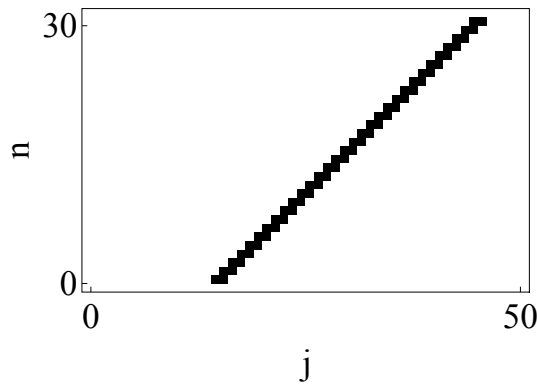


Figure 4.1: Eq.(4.3) における進行波解. 時間発展は下から上へ発展している.



ところで、今述べた Eq.(4.1) は BZ 反応を表すとされる反応拡散系 [19]

$$\begin{aligned}\tau \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + u(1-u) - \frac{bv(u-c)}{u+c}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + u - v\end{aligned}\quad (4.4)$$

と比べて大きく異なる部分をもつ。まず、Eq.(4.1) は高い対称性をもっている。これは、一次元 max-plus モデル Eq.(4.2) を見ればより明確であるが、時間及び空間に対して対称である。特に時間に対して対称であるため、Eq.(4.1) は時間に対し可逆の方程式である。一方、Eq.(4.4) は拡散過程の存在から明らかに非可逆である。また、反応拡散系では  $u-v$  相平面上での力学系ダイナミクスを解析することによって、系の振る舞いを解析する方法をよく用い、実際 Eq.(4.4) において単一のリミットサイクル [97] を得るが、Eq.(4.1) の  $U-V$  相平面においては、このような単一のリミットサイクルは存在しない。原因としては、Eq.(4.1) は  $U, V$  をそれぞれ  $cU, cV$  とスケール変換しても不変であり、したがって、Eq.(4.1) がスケール不変な方程式となっているためである。

このように、もとの反応拡散系 (4.4) と max-plus モデル (4.1) の間には明らかな違いがあるにも拘らず、両者とも実験で見られる BZ 反応の時空間パターンを再現するモデルとなっている。特に、差分系のモデルは簡潔で高い対称性をもつ。なぜこのような高い対称性を持つかについても、二つのモデルの関係性を明らかにすることに付随して研究する必要がある。

さて、以下の節では上記のような連立 max-plus モデルを、ある反応拡散方程式から直接導出し、その方程式の性質及び解のセルオートマトン化、そしてもとの反応拡散系との関係を議論していく。

まず、以下の反応拡散方程式の超離散モデルの導出を試みる。

$$\tau_u \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - v \quad (4.5)$$

$$\tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa u - \lambda v + i \quad (4.6)$$

但し、 $\tau_u, \tau_v, D_u, D_v, \kappa, \lambda, i$  は全て正の値とする。また、 $f$  については第3章で述べた

$$f(u) = -(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma) \quad (4.7)$$

を用いることにする。ここでも、 $\alpha, \beta, \gamma$  は定数で  $0 < \alpha < \beta < \gamma$  を満たしている。Eq.(4.5), Eq.(4.6) はそれぞれ活性化因子、抑制因子を表している。

後の節の構成は以下の通りである。まず、次の節では Eqs(4.5), (4.6) の超離散化を行い、連立超離散方程式を導出する。次に、活性化因子の超離散方程式における状

状態遷移の議論を行う。その後、状態遷移の議論に基づいて連立超離散方程式とセルオートマトンとを対応付け、さらに、セルオートマトンで表現される方程式の解としてパルス解が存在することを示す。

## 4.2 連立超離散化方程式

本節では Eqs.(4.5), (4.6) の超離散化を行い、連立超離散方程式を導出する。このとき、連立微分方程式における数学的に厳密な差分化を行うことはせず、あくまで後のセルオートマトンパターンと関連付けることができる超離散方程式を得る差分化を行う。すなわち、Eq(4.5) に対しては tropical 差分化を、Eq(4.6) に対しては前方差分化を行って超離散化を行う。また、得られた  $u$  に対する超離散方程式の性質を、状態遷移の議論を基に考える。この議論が、後に超離散方程式とセルオートマトンとの対応付けを可能にする。

### 4.2.1 連立超離散化方程式の導出

第3章の Eq.(3.17)-(3.20) を導出したときと同じ手順で、Eq.(4.5) の超離散方程式を得ることができる。Eq.(4.5) に Eq.(4.7) を代入して、tropical 差分化を行うと

$$u_j^{n+1} = w_j^n \frac{w_j^n + F(w_j^n)\Delta t}{w_j^n + G(w_j^n, v_j^n)\Delta t} \quad (4.8)$$

なる差分方程式を得る。ただし、 $w_j^n = \mu(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1-2\mu)u_j^n$  であり、 $\mu = \frac{D_u \Delta t}{\tau_u (\Delta x)^2}$  となっている。また、 $F, G$  は次のように定義している。

$$\begin{cases} F(u) = \frac{1}{\tau_u}[(\alpha + \beta + \gamma)u^2 + \alpha\beta\gamma] \\ G(u, v) = \frac{1}{\tau_u}[u^3 + (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)u + v] \end{cases} \quad (4.9)$$

注意として、このとき  $v$  は定数として差分化している。数学的には、連立微分方程式を差分するとき、離散時間に関して注意をする必要がある。例えば、Gray-Scott モデルのような反応拡散系の場合、その活性化因子、抑制因子に対する微分方程式の対称性から、Eq.(4.8) の  $v_j^n$  を  $v_j^{n+1}$  に変えなければならない [98][99]。今の場合、Eq.(4.5), Eq.(4.6) は反応項が対称な方程式になっていないため、厳密な差分化が出来ない。したがって、 $v$  を定数とみて、各方程式をある意味独立に差分化している。さて、Eq.(4.8)

には負の項がないので、超離散化が可能となる。変数変換

$$\begin{cases} \Delta t / \tau_u = e^{T/\varepsilon} / (\mu^{n+1})^2, & u_j^n = \mu^n e^{U_j^n / \varepsilon}, & v_j^n = (\mu^{n+1})^3 e^{V_j^n / \varepsilon} \\ \alpha = \mu^{n+1} e^{A/\varepsilon}, & \beta = \mu^{n+1} e^{B/\varepsilon}, & \gamma = \mu^{n+1} e^{\Gamma/\varepsilon} \\ (1 - 2\mu) / \mu = e^{M/\varepsilon} \end{cases} \quad (4.10)$$

を行った後、超離散極限公式 (2.10) を用いて以下の超離散方程式を得る。

$$U_j^{n+1} = W_j^n + \max\{W_j^n, T + \max(A + 2W_j^n, B + 2W_j^n, \Gamma + 2W_j^n, A + B + \Gamma)\} \\ - \max\{W_j^n, T + \max(3W_j^n, A + B + W_j^n, A + \Gamma + W_j^n, B + \Gamma + W_j^n, V_j^n)\} \quad (4.11)$$

ただし、 $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, M + U_j^n, U_{j-1}^n)$  である。今、 $A < B < \Gamma$  を用いることにより、Eq.(4.11) は

$$U_j^{n+1} = W_j^n + \max\{W_j^n, T + \max(\Gamma + 2W_j^n, A + B + \Gamma)\} \\ - \max\{W_j^n, T + \max(3W_j^n, B + \Gamma + W_j^n, V_j^n)\} \quad (4.12)$$

となる。次に、Eq.(4.6) の超離散化を行う。

$$\tau_v \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = D_v \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \kappa u_j^n - \lambda v_j^n + i \quad (4.13)$$

を式変形して、

$$v_j^{n+1} = \theta(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + (1 - 2\theta - \frac{\lambda \Delta t}{\tau_v})v_j^n + \frac{\Delta t \kappa}{\tau_v}u_j^n + \frac{\Delta t i}{\tau_v} \quad (4.14)$$

なる差分方程式を得る。ただし、 $\theta = (D_v \Delta t) / ((\Delta x)^2 \tau_v)$  である。ここで、変数変換

$$v_j^n = \theta^n e^{V_j^n / \varepsilon}, \quad \frac{1}{\theta} \left(1 - 2\theta - \frac{\lambda \Delta t}{\tau_v}\right) = e^{N/\varepsilon}, \quad \frac{\Delta t \kappa}{\tau_v} = \frac{\theta^{n+1} e^{S/\varepsilon}}{\mu^n}, \quad \frac{\Delta t i}{\tau_v} = \theta^{n+1} e^{I/\varepsilon} \quad (4.15)$$

を行う。このとき、Eq.(4.10) との整合性から  $(\mu^{n+1})^3 = \theta^n$  となっている。超離散極限公式を用いて、

$$V_j^{n+1} = \max(L_j^n, S + U_j^n, I) \quad (4.16)$$

なる超離散方程式を得る。ここで、 $L_j^n = \max(V_{j+1}^n, N + V_j^n, V_{j-1}^n)$  である。以上から、連立超離散方程式 Eq.(4.12), Eq.(4.16) が得られる。

#### 4.2.2 状態遷移の議論

次に、Eq.(4.12) に関して、 $U_j^n$  の状態遷移にどのように  $V_j^n$  が関係してくるのかを議論しよう。すなわち、 $U_j^n(W_j^n)$  と  $V_j^n$  の値が与えられたとき、Eq.(4.12) に従って  $U_j^{n+1}$

の値を考える．まず，任意の  $W_j^n$  に対して  $V_j^n \leq \max(3W_j^n, B + \Gamma + W_j^n)$  が成立しているとき， $V_j^n$  は Eq.(4.12) から無視される．このとき，Eq.(4.12) は完全に超離散 Allen-Cahn 方程式に一致する．さらに，もし  $T \geq \max\{0, -(A + B + \Gamma)\}$  を満たすとすると，超離散 Allen-Cahn 方程式は超離散安定性という性質をもつ．以下にその定義を述べる [77]．

[定義] 超離散方程式の解  $\psi_j^n$  が超離散安定 (ultradiscrete stable) であるとは，初期値  $\psi_j^0 + K_j$  ( $K_j$  は定数) に対して，有限時刻の後，解が  $\psi_j^n$  に収束することをいう．

超離散 Allen-Cahn 方程式は  $A, \Gamma$  で超離散双安定となることが知られている．すなわち，Eq.(4.12) は  $T \geq \max\{0, -(A + B + \Gamma)\}$  かつ  $V_j^n \leq \max(3W_j^n, B + \Gamma + W_j^n)$  のとき，超離散双安定となり，その解は有限時刻の後に必ず  $A$  もしくは  $\Gamma$  になる．

Eq.(4.12) による  $W_j^n$  から  $U_j^{n+1}$  への状態遷移は，Fig.4.2 なるダイアグラムとしてまとめられる．この Fig.4.2 から， $U_j^n$  は  $V_j^n$  の値に依存して  $A$  もしくは  $\Gamma$  へ収束する．I-IV の範囲において，ある時刻  $n$  が存在して  $U_j^n$  は  $A$  または  $\Gamma$  に収束する．これは，Eq.(4.12) の超離散安定性によるものである．特に， $W_j^n < (A + B)/2$  または  $W_j^n > (B + \Gamma)/2$  の範囲では， $U_j^{n+1}$  は  $A$  または  $\Gamma$  となる．また， $W_j^n > (A + B)/2$  の範囲では  $V_j^n = 3W_j^n + \Gamma - A$  であるとき  $U_j^{n+1} = A$  となり， $W_j^n > B$  の範囲では  $V_j^n = 3W_j^n + \Gamma - B$  であるとき  $U_j^{n+1} = B$  となっている．

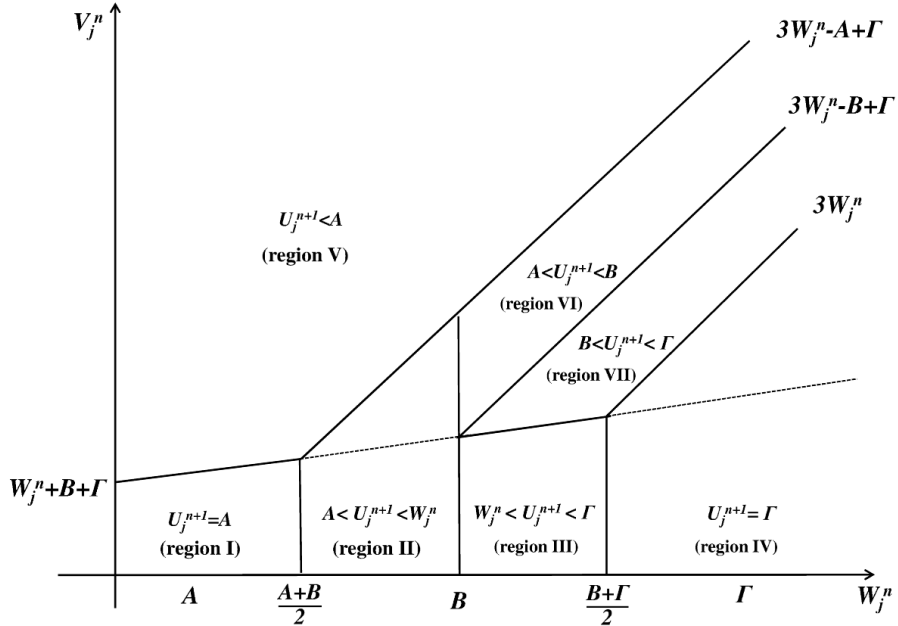


Figure 4.2:  $U_j^n$  の離散時刻  $n$  から  $n + 1$  への状態遷移のダイアグラム．各範囲 (I ~ VII) は実線によって分けられている．

ここで, Fig.4.2 の導出を見ていこう. 以下の計算では  $T \geq \max\{0, -(A+B+\Gamma)\}$  を仮定する. 簡単のため,  $n = 0$  とする.

- (i)  $(A+B)/2 \leq W_j^0 < B$  のとき,  $A+B \leq 2W_j^0 < B+\Gamma$  と  $T \geq \max\{0, -(A+B+\Gamma)\}$  から導かれる関係式  $\max(\Gamma + 2W_j^0, A+B+\Gamma) = \Gamma + 2W_j^0$ ,  $\max(3W_j^0, B+\Gamma+W_j^0) = B+\Gamma+W_j^0$ , そして  $W_j^0 \leq T+\Gamma+2W_j^0$  を用いて,

$$\begin{aligned} U_j^1 &= W_j^0 + \max\{W_j^0, T + \max(\Gamma + 2W_j^0, A+B+\Gamma)\} \\ &\quad - \max\{W_j^0, T + \max(3W_j^0, B+\Gamma+W_j^0, V_j^0)\} \\ &= (T+\Gamma+3W_j^0) - \max(T+B+\Gamma+W_j^0, T+V_j^0) \\ &\leq (T+\Gamma+3W_j^0) - (T+B+\Gamma+W_j^0) = 2W_j^0 - B < W_j^0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

となる.

(i-a) もし  $V_j^0 < 3W_j^0 + \Gamma - A$  ならば, Eq.(4.17) から  $A < U_j^1$  となる.

(i-b) もし  $V_j^0 \geq 3W_j^0 + \Gamma - A$  ならば,  $U_j^1 = 3W_j^0 + \Gamma - V_j^0 \leq A$  を得る. ここで  $V_j^0 = 3W_j^0 + \Gamma - A$  ならば  $U_j^1 = A$  を得る.

- (ii)  $W_j^0$  が  $A \leq W_j^0 \leq (A+B)/2 (< B)$  を満たすとき,  $W_j^0 < A+B+\Gamma+T$  を用いて

$$\begin{aligned} U_j^1 &= W_j^0 + \max(W_j^0, A+B+\Gamma+T) - \max(W_j^0, T+B+\Gamma+W_j^0, T+V_j^0) \\ &= W_j^0 + A+B+\Gamma+T - \max(T+B+\Gamma+W_j^0, V_j^0+T) \quad (4.18) \end{aligned}$$

を得る.

(ii-a) もし  $V_j^0 \leq B+\Gamma+W_j^0$  とすると  $U_j^1 = A$  となる. すなわち,  $V_j^0 \leq B+\Gamma+W_j^0$  のとき  $A$  は安定点となる.

(ii-b)  $V_j^0 > B+\Gamma+W_j^0$  のときは, Eq.(4.18) から関係式  $U_j^1 = W_j^0 + A+B+\Gamma - V_j^0 < A$  を得る.

また  $W_j^0 < A$  を考えると,  $V_j^0 \leq B+\Gamma+W_j^0$  ならば  $U_j^1 = A$  であり,  $V_j^0 > B+\Gamma+W_j^0$  ならば  $U_j^1 < A$  となる.

- (iii)  $B < W_j^0 \leq (B+\Gamma)/2$  のとき,  $0 < T+B+\Gamma+W_j^0$  かつ  $T \geq \max\{0, -(A+B+\Gamma)\}$  から

$$\begin{aligned} U_j^1 &= W_j^0 + \max\{W_j^0, T + \max(\Gamma + 2W_j^0, A+B+\Gamma)\} \\ &\quad - \max\{W_j^0, T + \max(3W_j^0, B+\Gamma+W_j^0, V_j^0)\} \\ &= 3W_j^0 + \Gamma + T - \max\{B+\Gamma+T+W_j^0, V_j^0+T\} \quad (4.19) \end{aligned}$$

を得る. Eq.(4.19) から以下の四つの場合を得る.

(iii-a) もし  $V_j^0 \leq B + \Gamma + W_j^0$  のとき,  $U_j^1 = 2W_j^0 - B$  を得る. よって  $U_j^1$  は  $W_j^0 < U_j^1 < \Gamma$  を満たす.

(iii-b)  $3W_j^0 < V_j^0 \leq 3W_j^0 + \Gamma - B$  なる  $V_j^0$  を考えよう. Eq.(4.19) から,  $B \leq U_j^1 = 3W_j^0 + \Gamma - V_j^0 < \Gamma$  を得る. ここで,  $V_j^0 = 3W_j^0 + \Gamma - B$  から  $U_j^1 = B$  を得る.

(iii-c) もし  $V_j^0$  が  $3W_j^0 + \Gamma - B < V_j^0 < 3W_j^0 + \Gamma - A$  を満たすとき,  $B + \Gamma + W_j^0 < 3W_j^0 + \Gamma - B$  から  $A < U_j^1 < B$  を得る.

(iii-d) もし  $V_j^0 \geq 3W_j^0 + \Gamma - A$  ならば,  $U_j^1 \leq A$ . ただし  $U_j^1 = A$  は  $V_j^0 = 3W_j^0 + \Gamma - A$  のとき満たされる.

(iv) 最後に  $(B + \Gamma)/2 \leq W_j^0 \leq \Gamma$  なる場合を考えよう.

$$\begin{aligned} U_j^1 &= W_j^0 + \max\{W_j^0, T + \Gamma + 2W_j^0\} - \max\{W_j^0, T + 3W_j^0, T + V_j^0\} \\ &= 3W_j^0 + \Gamma + T - \max\{T + 3W_j^0, V_j^0 + T\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

が  $A + B < B + \Gamma < 2W_j^0$  を考慮すると得られる. Eq.(4.20) から, 以下の四つの場合を得る.

(iv-a) もし  $V_j^0 \leq 3W_j^0$  とすると  $U_j^1 = \Gamma$  となる.

(iv-b) もし  $3W_j^0 < V_j^0 \leq 3W_j^0 + \Gamma - B$  のとき,  $B \leq U_j^1 < \Gamma$ . ここで,  $V_j^0 \leq 3W_j^0 + \Gamma - B$  とすると  $U_j^1 = B$  となる.

(iv-c)  $3W_j^0 + \Gamma - B < V_j^0 < 3W_j^0 + \Gamma - A$  のとき,  $A < U_j^1 < B$  となっている. (iii-c).

(iv-d) もし  $V_j^0 \geq -A + \Gamma + 3W_j^0$  とすると,  $U_j^1 \leq A$  を得る. ここで  $V_j^0 = -A + \Gamma + 3W_j^0$  に対して  $U_j^1 = A$  である.

同様に  $\Gamma < W_j^0$  に対して, 我々は以下の四つの場合を得る. もし  $V_j^0 \leq 3W_j^0$  のときは,  $U_j^1 = \Gamma$  となる. もし  $3W_j^0 < V_j^0 \leq 3W_j^0 + \Gamma - B$  のときは,  $B \leq U_j^1 < \Gamma$  となっている. もし  $-B + \Gamma + 3W_j^0 < V_j^0 < -A + \Gamma + 3W_j^0$  ならば,  $A < U_j^1 < B$ . そして  $V_j^0 \geq -A + \Gamma + 3W_j^0$  のとき,  $U_j^1 \leq A$  を得る.

以上から, Fig.4.2 を示すことができた.

注意として, Fig.4.2 は Eq.(4.12) 中の  $V_j^n$  を定数とみなして得られる, 一般的な関係図である. したがって, 適当な関数  $f$  を用いた三次の非線形項が入った拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) + f(v)$$

から tropical 差分化を用いて超離散方程式を導いた際, その超離散方程式は,  $V_j^n$  を  $F(V_j^n)$  に変えた Fig.4.2 に従って必ず状態が遷移される. ただし,  $F(V_j^n)$  は  $F(V_j^n) = \varepsilon \log f_j^n(v_j^n)$  なる関数である.

### 4.3 セルオートマトンパターン

本節では, 状態遷移の議論から, Eq.(4.12) とセルオートマトンとの関係を示し, どのような条件を課せば Eq.(4.16) から影響を受ける Eq.(4.12) の解がセルオートマトンとして表現できるかを述べる. そして, 実際に現れるセルオートマトンの時間発展ルールを求める. 特に, 物理的に興味があるセルオートマトン解として, あるドメインから周期的に輻射されるセルオートマトンパターンと, 進行波, ソリトン, 対消滅を行うセルオートマトンパターンの存在を示す. これらは,  $W_j^n$  中に現れていた  $M$  の値を変えることで現れる.

#### 4.3.1 セルオートマトンとなるための条件

Fig.4.2 から次の条件が得られる.

$$V_j^n = 3W_j^n - A + \Gamma \quad \left( W_j^n > \frac{A+B}{2} \right) \quad (4.21)$$

のとき,  $U_j^{n+1} = A$  となる. そして,

$$V_j^n \leq \max(3W_j^n, W_j^n + \Gamma + B) \quad (4.22)$$

のとき,  $U_j^{n+1} \in \{A, \Gamma\}$  となる. これらの結果は,  $A, \Gamma$  を 0, 1 とみなすことによつて Eq.(4.12) が二値のセルオートマトンで表される解の構造をもつ事を示唆している. しかしながら, これまで定数とみなしてきた  $V_j^n$  が, Eq.(4.16) に従って時間発展する中で, Eq.(4.21) または Eq.(4.22) を常に満たすとは限らない. そこでまず, 初期状態を  $U_j^0 \in \{A, \Gamma\}$  として与えたとき,  $U_j^n$  が常に  $A$  または  $\Gamma$  となるような,  $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, U_{j-1}^n, U_j^n + M)$  における  $M$  の条件を考察しよう.

今,  $M$  に対して以下の (i), (ii) の条件を与えると,  $W_j^n \leq (A+B)/2$  または  $W_j^n \geq (B+\Gamma)/2$  となることが示される.

(i)  $W_j^n \geq (B+\Gamma)/2$  となるための条件

(i-1)  $U_j^n = A, U_{j\pm 1}^n \in \{A, \Gamma\}$  に対して  $M \geq (\Gamma + B - 2A)/2$

(i-2)  $U_j^n = \Gamma, U_{j\pm 1}^n \in \{A, \Gamma\}$  に対して  $M \geq (B - \Gamma)/2$

(ii)  $W_j^n \leq (A + B)/2$  となるための条件

(ii-1)  $U_j^n = A, U_{j\pm 1}^n = A$  に対して  $M \leq (B - A)/2$

(ii-2)  $U_j^n = \Gamma, U_{j\pm 1}^n = A$  に対して  $M \leq (A + B - 2\Gamma)/2$

(ii-3)  $U_j^n \in \{A, \Gamma\}$  かつ  $U_{j\pm 1}^n = \Gamma$  のとき  $M$  に対して条件は存在しない.

例えば, (i) を示してみよう.  $W_j^n = \max\{U_{j-1}^n, U_j^n + M, U_{j+1}^n\} \geq \frac{B + \Gamma}{2}$  なる  $M$  の条件を考えたい.  $U_j^n, U_{j\pm 1}^n \in \{A, \Gamma\}$  を仮定すると,  $U_j^n + M \geq \frac{B + \Gamma}{2}$  が十分条件である. したがって,  $U_j^n = A$  のとき ((i-1)),  $M \geq \frac{B + \Gamma}{2} - A = \frac{B + \Gamma - 2A}{2}$  となる. また,  $U_j^n = \Gamma$  のとき ((i-2)),  $M \geq \frac{B - \Gamma}{2}$  となる. (ii) についても, 同様の計算をすれば, 上記の十分条件を得る.

関係式  $A + B - 2\Gamma < B - \Gamma < B - A < B + \Gamma - 2A$  を考えれば, 上記の条件は  $M \leq (A + B - 2\Gamma)/2, (B - \Gamma)/2 \leq M \leq (B - A)/2, (\Gamma + B - 2A)/2 \leq M$  としてまとめられる. 特に,  $M \leq A - \Gamma$  または  $M = 0$  のとき,  $W_j^n$  は  $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, U_{j-1}^n)$  または  $W_j^n = \max(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n)$  として与えられ,  $W_j^n \in \{A, \Gamma\}$  となる. 以上から次が示される. すなわち, もし  $U_j^n \in \{A, \Gamma\}$  であり  $V_j^n, V_{j\pm 1}^n$  が Eq.(4.21) または Eq.(4.22) を満たすならば,  $U_j^{n+1} \in \{A, \Gamma\}$  となる.

ここで, Eq.(4.16) に従って時間発展をする  $V_j^n$  が, Eq.(4.21), Eq.(4.22) を共に満たさない場合が存在することに注意しよう. 実際,  $W_j^n = \Gamma, N = 0$  として  $V_j^n$  が Eq.(4.21) を満たすものとしよう. すなわち,  $V_j^n = 3\Gamma - A + \Gamma = 4\Gamma - A$  とする. このとき, Eq.(4.16) から  $V_j^{n+1} = \max(4\Gamma - A, V_{j\pm 1}^n, S + U_j^n, I) \geq 4\Gamma - A$  を得る. 今  $W_j^{n+1} \in \{A, \Gamma\}$  に対して  $V_j^{n+1} \geq 4\Gamma - A$  となっているので,  $W_j^{n+1} = A$  に対して  $V_j^{n+1}$  は Eq.(4.21) と Eq.(4.22) のどちらも満たさないことになる. したがって, 超離散 Allen-Cahn 方程式におけるセルオートマトンのルールと異なる二値のセルオートマトンルールを導出するために, 我々はさらに付加条件を考慮しなければならない. 例として, 以下の条件を仮定しよう.

$$\text{もし } W_j^n = A, \text{ ならば } U_j^{n+1} \equiv A. \quad (4.23)$$

#### 4.3.2 セルオートマトンルール

$M$  に対する条件:  $M \leq A - \Gamma$  又は  $M = 0$ , 及び  $T$  に対する条件:  $T \geq \max\{0, -(A + B + \Gamma)\}$ , そして  $N = 0$  なる仮定の下で, Eqs.(4.12), (4.16) そして (4.23) を用いて



$\{U_j^n\}$  に対するいくつかのセルオートマトンルールが導出される。以下、それらのルールを見ていこう。

(Case1) まず,  $V_j^n$  が常に Eq.(4.22) のみ満たす場合を考える。これは, Eq.(4.16) の初期条件として  $V_j^0 \leq \max\{3W_j^0, W_j^0 + \Gamma + B\}$ ,  $W_j^0 \in \{A, \Gamma\}$  であるとき,  $S \leq A + B$  かつ  $I \leq A + B + \Gamma$  とすれば十分である。この場合,  $V_j^n$  は Eq.(4.12) から完全に削除される。したがって, 系の時間発展は超離散 Allen-Cahn 方程式と同じものとなる。具体的には, Eq.(4.12) の時間発展は  $M \leq A - \Gamma$  に対してエレメンタリーセルオートマトンルール 250 を,  $M = 0$  に対してエレメンタリーセルオートマトンルール 254 として記述される。

(Case2) 今,  $S = 3\Gamma - A$  かつ  $I < 3\Gamma$  としよう。このとき Eq.(4.16) は

$$V_j^{n+1} = \max(V_{j\pm 1}^n, V_j^n, 3\Gamma - A + U_j^n) \quad (4.24)$$

となる。もし, ある  $n$  と  $j$  が存在して,  $W_j^n = \Gamma$  のときに  $V_j^n$  が Eq.(4.21) を満たすとする。すなわち,  $V_j^n = 4\Gamma - A$  とする。このとき,  $4\Gamma - A$  が Eq.(4.24) の中で一番大きいことから,  $U_j^{n+1} = A$  であり,  $V_k^{n+1} = 4\Gamma - A$  ( $k = j, j \pm 1$ ) となる。したがって,  $U_k^{n+2} = A$  ( $k = j, j \pm 1$ ) となる。同様に計算することによって,  $V_{k'}^{n+2} = 4\Gamma - A$ ,  $U_{k'}^{n+3} = A$  ( $k' = j, j \pm 1, j \pm 2$ ) を得る。これを繰り返すと, ある時刻  $n_0$  が存在して全ての  $j$  で  $U_j^{n_0} = A$  となる。

(Case3)  $S = 3\Gamma - A$ ,  $I < 3\Gamma$  として  $V_{j\pm 1}^n, V_j^n \leq 3\Gamma - A + U_j^n$  を任意の  $n$  について仮定しよう。この場合, Eq.(4.24) は

$$V_j^{n+1} = 3\Gamma - A + U_j^n \quad (4.25)$$

となる。さらに, Eq.(4.12) を  $W_j^n \in \{A, \Gamma\}$  と  $T \geq \max\{0, -(A + B + \Gamma)\}$  のもとで式変形すると,

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = & W_j^n + \max\{T + \Gamma + 2W_j^n, T + A + B + \Gamma\} \\ & - \max\{T + 3W_j^n, T + B + \Gamma + W_j^n, T + V_j^n\} \end{aligned}$$

となる。ここで,  $\Gamma < T + 3\Gamma$  なる関係式を用いた。さらに, この方程式と Eq.(4.25) とを結合することによって,  $U_j^n, U_{j\pm 1}^n$ , そして  $U_j^{n-1}$  を変数とした以下の超離散方程式を得る。

$$U_j^{n+1} = W_j^n + \max(\Gamma + 2W_j^n, A + B + \Gamma) - \max(3W_j^n, B + \Gamma + W_j^n, 3\Gamma - A + U_j^{n-1}) \quad (4.26)$$

ただし,  $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, U_j^n + M, U_{j-1}^n)$  である. 以上より, Eq.(4.23) を考慮に入れて次のセルオートマトンルールを得る.

$$W_j^n = \begin{cases} A, & \rightarrow \text{Eq.(4.23)} \\ \Gamma, & \rightarrow \text{Eq.(4.26)} \end{cases} \quad (4.27)$$

(**Case3-a**) ここから, **Case3** におけるセルオートマトンダイナミクスの特徴を調べていく. まず,  $M = 0$  を考えよう. このとき  $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n)$  となり, Eq.(4.27) から得られるセルオートマトンのルールは Table 4.1 となる.

Table 4.1:  $M = 0$  における (4.27) によって与えられるセルオートマトンルール.  $U_j^{n+1}$  のカッコ内の値は,  $U_j^{n-1}$  のカッコ内の値から計算されるものである.

$U_j^{n-1}$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$
$U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n$	$\Gamma, \Gamma, \Gamma$	$\Gamma, \Gamma, A$	$\Gamma, A, \Gamma$	$A, \Gamma, \Gamma$	$\Gamma, A, A$	$A, \Gamma, A$	$A, A, \Gamma$	$A, A, A$
$W_j^n$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$A$
$U_j^{n+1}$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(A)$

Eq.(4.26) が時間に対して二階の差分方程式となっていることから,  $\{U_j^0\}$  と  $\{U_j^1\}$  を初期条件として与える必要がある. Fig.4.3 は, 三つの異なる初期条件において Table 4.1 のルールに従って得られる時空間パターンの結果である. ここで, 黒, 白はそれぞれ  $\Gamma$ ,  $A$  の値を表している. 初期条件は以下の (a)-(d) として定めている. (a) ある一点を  $U^0 = U^1 = \Gamma$  とし, その他の点は  $U^0 = U^1 = A$  としている. (b) 異なる二つの点を  $U^0 = U^1 = \Gamma$  とし, それ以外の点は  $U^0 = U^1 = A$  としている. (d)  $\Gamma$  と  $A$  をランダムに  $U^0, U^1$  に割り当てている. さて, Fig.4.3 の特徴を見てみよう. Fig.4.3(a) において,  $\Gamma$  の値をもった初期値から,  $U = \Gamma$  なる二つのセルが周期的に作られており, この二つのセルはパルスとして互いに反対方向に伝搬する. Fig.4.3(b) は, この二つのパルスが衝突する際, 対消滅することを示している. Fig.4.3(d) では, ランダムな初期条件からの時空間パターンを示している. なお, Fig.4.3(b) は初期条件において, 2つの” $\Gamma$ ”の間隔を一つずらしても, 時空間パターンは周期的挙動を保持し, 次の Case3-b に見られる初期配置の違いによる挙動の違いを起こすことはない (Fig.4.3(c)).

(**Case3-b**)  $M \leq A - \Gamma$  のとき, すなわち  $W_j^n = \max(U_{j+1}^n, U_{j-1}^n)$  のとき, Eq.(4.27) から Table 4.2 なるセルオートマトンルールを得る. Table 4.2 によって出現する時空間セルオートマトンパターンを, 初期条件を変えて計算したものを Fig.4.4 に示した. ここで, 黒, 白はそれぞれ  $\Gamma$  と  $A$  を表している. また, 初期条件は以下の (a)-(d) として定めている. (a) ある位置  $j$  で  $U_j^0 = U_{j+1}^1 = \Gamma$  とし, その他は全て  $U^0 = U^1 = A$ . (b), (c) ある位置  $j$  と  $k$  ( $\neq j$ ) に対して

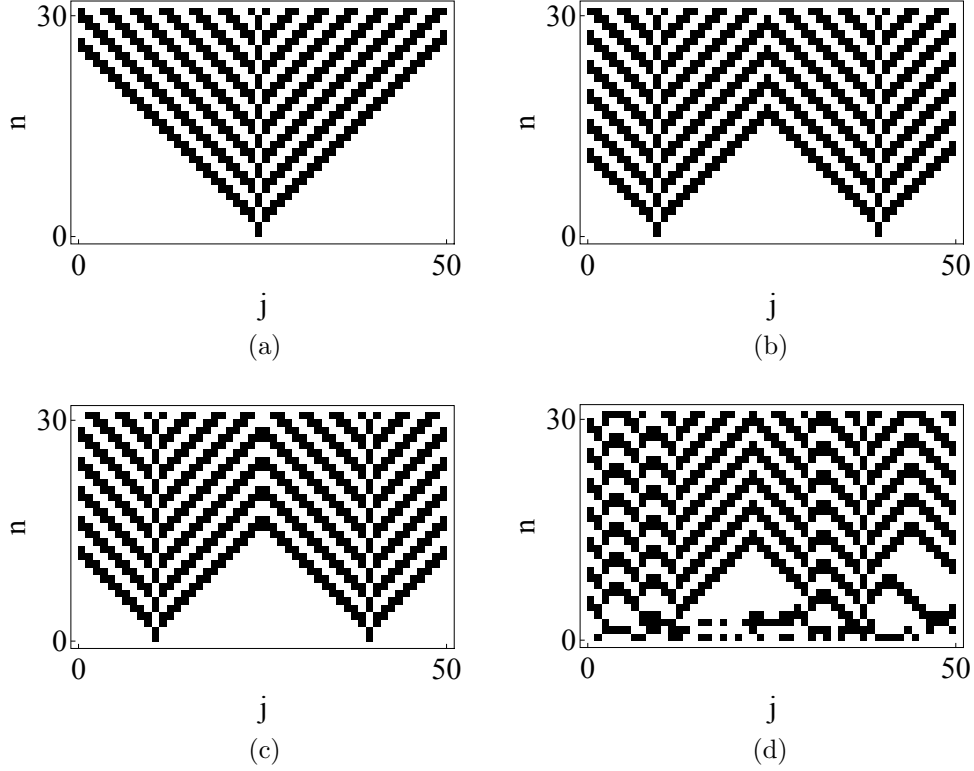


Figure 4.3: Table 4.1 における時空間パターン. 下から上へ時間発展している. 黒, 白色はそれぞれ  $\Gamma$  と  $A$  に対応している.

Table 4.2:  $M \leq A - \Gamma$  における (4.27) によって与えられるセルオートマトンルール.  $U_j^{n+1}$  のカッコ内の値は,  $U_j^{n-1}$  のカッコ内の値から計算されるものである.

$U_j^{n-1}$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$	$\Gamma(A)$
$U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n$	$\Gamma, \Gamma, \Gamma$	$\Gamma, \Gamma, A$	$\Gamma, A, \Gamma$	$A, \Gamma, \Gamma$	$\Gamma, A, A$	$A, \Gamma, A$	$A, A, \Gamma$	$A, A, A$
$W_j^n$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	$A$	$\Gamma$	$A$
$U_j^{n+1}$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(\Gamma)$	$A(A)$	$A(\Gamma)$	$A(A)$

$U_j^0 = U_{j+1}^1 = \Gamma$  であり,  $U_k^0 = U_{k-1}^1 = \Gamma$ . その他は全て  $U^0 = U^1 = A$ . (d)  $U^0$  と  $U^1$  に対して  $A, \Gamma$  をランダムに割り当てた. さて, Fig.4.4 の時空間パターンの特徴を見よう. まず, Fig.4.4(a) を見ると, 初期位置から  $U = \Gamma$  の値を保ちながら右方向へ進行するセルが存在する. Fig.4.4 の (b), (c) は,  $U = \Gamma$  の値を取りながら進行するセルの衝突において二つの異なる場合が存在することを表している. すなわち, 衝突後また進行するソリトンのように振る舞う衝突と, 対消滅してしまう衝突がある. この衝突後の違いは, 衝突するふたつのセルの相対位置に関係している. もし, 進行してきたセルがある時刻  $n$  で位置  $j$  にいたとき, すなわち,  $U_j^n = \Gamma$ , 反対方向から進行してきたセルと位置  $j+1$  において, すなわち,  $U_{j+1}^n = \Gamma$  で出会うとする. すると, これらはその後互いに通り抜けてしまい, セルは保存される. 一方, もし二つの互いに反対方向から進行してきたセルが, ある時刻で同じ位置に存在してしまうと, その後対消滅する. Fig.4.4(d)

では, ランダムな初期条件からの時空間パターンを示している. Fig.4.4(b), (c) で見たように, ソリトンの振る舞うセルと, 対消滅するセルとが混在していることが見て取れる.

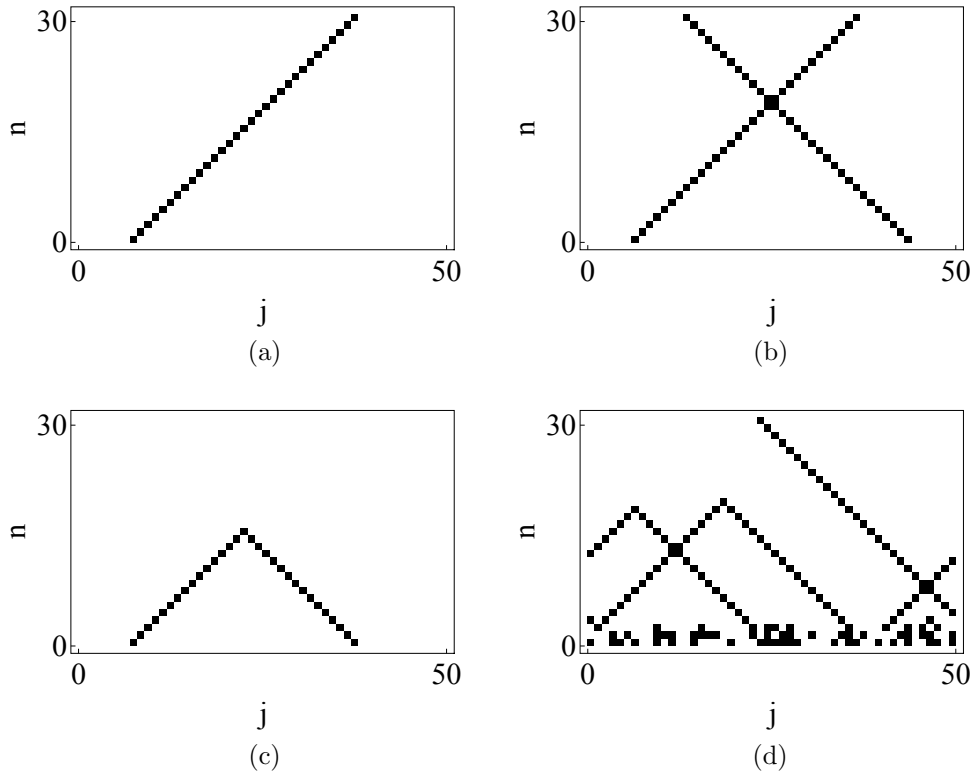


Figure 4.4: Table 4.2 における時空間パターン. 時間発展は下から上へと発展している. 黒, 白色はそれぞれ  $\Gamma$  と  $A$  に対応している.

#### 4.4 反応拡散モデルと超離散化モデルとの比較

本章では, まず 4.2 にて反応拡散系 Eqs.(4.5), (4.6) から tropical 差分化を用いて, 連立の超離散方程式 Eqs.(4.12), (4.16) を導出した. その後, 4.3 で Eq.(4.12) における状態遷移の議論を行った. この議論は Eq.(4.12) の形の超離散方程式に対し一般的に行われるものであり, Fig.4.2 に従って遷移することが分かった. この Fig.4.2 から, 状態が二値化し安定になることは非常に限られた範囲に限ることがわかる. この限られた範囲に着目したとしても, 連立超離散方程式として機能するためには, さらに人為的な条件 Eq.(4.23) が必要であった. この条件は, あくまで Eqs.(4.12), (4.16) から物理的な時空間パターンを出現させるためのものであり, 数学的論理に基づくものではない. しかしながら, Eq.(4.23) の条件を基に計算すると, Fig.4.3, Fig.4.4 で見たように, 確かにいくつかの時空間パターンの存在が確認される. したがって, このような (境界) 条件は確かに必要だと思われる. この条件の詳しい導出は今後の課題で

ある.

さて, 反応拡散系 Eqs.(4.5), (4.6) は  $f(u)$  を Eq.(4.7) とするとき, 変数に依存して興奮性 (excitability), 振動性 (oscillatory), また, 双安定性 (bistability) などの性質を示す. 実際, 系は  $v = \frac{\kappa}{\lambda}u + \frac{i}{\lambda}$  なる一次関数が,  $v = -(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$  なる三次関数と交点を一つ持ちかつその交点の  $x$  座標が三次関数の極小値の  $x$  座標より小さいならば興奮性, 三次関数の極小値の  $x$  座標より大きく, 極大値の  $x$  座標より小さいならば振動性, そしてもし交点を三つもつならば双安定性を示す. これらの特徴は, 本論文中 Fig.4.3, Fig.4.4 で示したセルオートマトンルール (Case1)~(Case3) において Fig.4.2 のダイアグラムおよび得られた時空パターンを考慮すれば, 超離散系と以下のような定性的対応がつく: (i) Case1 は双安定性. ただし,  $\Gamma$  の方が  $A$  より安定. (ii) Case2 は双安定性. ただし,  $A$  の方が  $\Gamma$  より安定. (iii) Case3 は Case3-a, Case3-b ともに興奮性. 実際に, Case3-a, Case3-b が興奮性を示すことは, 以下のように確かめられる. 今, セルオートマトンの初期値として全ての位置  $j$  において  $U_j^0 = U_j^1 = \Gamma$  を考えたとき, Case3-a, および, -b のルール (Table I, II) いずれの場合も,  $n = 2$  以降の全ての位置においてセルの状態は  $A$  となる. したがって, Case3-a, Case3-b ともに興奮性を示す. しかしながら, 係数を定量的に比較し対応関係をより具体的につけることは困難であると思われる. というのは, 変数変換 (4.10), (4.15) から, 元の方程式と超離散後の方程式との係数は一対一対応していない. このため, 変数間の対応にある程度任意性が出てきてしまう.

また反応拡散系 Eqs.(4.5), (4.6) は Eq.(1.1) の一般化になっていることに注意しよう. Eq.(1.1) なる反応拡散モデルは, 第1章で述べたように, 周期的に反対方向にパルスを放射する解や, パルスの対消滅, 保存, 自己複製の存在が示されていた. このとき,  $f(u)$  が (4.7) で与えられる場合は安定に伝播するパルスどうしが衝突すると対消滅する [20]. この事実は, 超離散系の時空パターン, 特に Case3-b において, Fig.4.4(c) が反応拡散系で得られる時間発展に対応し, 一方 Fig.4.3(a) 及び Fig.4.4(b) が超離散化による副産物と考えることを示唆するものである.

ここで, Case3-a の Fig.4.3(a) における周期性の出現について, Case3-b との違いを見るために以下のような簡単なセルオートマトンモデルを考えよう. 3つのセルからなる系に周期境界条件を課し, 初期条件を  $U_1^0 = U_3^0 = U_1^1 = U_3^1 = \Gamma$ ,  $U_2^0 = U_2^1 = A$  とする. このとき, Case3a, Case3b のルールでの時間発展は以下の Table 4.4 のようになり,  $n = 3$  以降, Case3-a と -b との間に違いが現れることがわかる. この表において, Case3-b では興奮系が保たれる一方, Case3-a ではペースメーカーのような周

Table 4.3: 3つのセルから成る系における Case3-a, Case3-b によるセルオートマトンの時間発展

	(Case3-a)	(Case 3-b)
$n = 0$	$\Gamma, A, \Gamma$	$\Gamma, A, \Gamma$
$n = 1$	$\Gamma, A, \Gamma$	$\Gamma, A, \Gamma$
$n = 2$	$A, \Gamma, A$	$A, \Gamma, A$
$n = 3$	$A, \Gamma, A$	$A, A, A$
$n = 4$	$\Gamma, A, \Gamma$	$A, A, A$
$n = 5$	$\Gamma, A, \Gamma$	$A, A, A$

期的挙動 (periodic generation) がみられる. この違いは, Table I. の右から3番目のルールが原因であり, Case3-a における「周期性」は超離散化によって生じた, 元の反応拡散系 (4.5)-(4.7) では見られない副次的なものであると示唆される.

ところで, 4.3 で示された時空間パターンにおいて, セルオートマトンセルの自己複製, そして Sierpinski gasket パターンは見られなかった. その理由を大雑把に述べるために, 逆超離散化の方法を用いよう. ここで, 逆超離散化の方法とは, 超離散化の逆のプロセスによって超離散方程式から差分方程式を導出する方法のことをいう [100]. 逆超離散化によって, 与えられたセルオートマトンパターンを記述するセルオートマトンの方程式から, 同じセルオートマトンパターンを記述する微分方程式や差分方程式を導き出す研究も進められている [101][102]. 例えば, 諸言で述べた Sierpinski gasket パターンの方程式 Eq.(1.2) は逆超離散化によって以下の微分方程式を導く.

$$\begin{cases} \frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = -(x(r, t) - E(y_1(r, t), y_2(r, t))) \\ \frac{\partial y_1(r, t)}{\partial t} = -\gamma \left( y_1(r, t) + \lambda \frac{\partial y_1(r, t)}{\partial r} - F(x(r, t)) \right) \\ \frac{\partial y_2(r, t)}{\partial t} = -\gamma \left( y_2(r, t) + \lambda \frac{\partial y_2(r, t)}{\partial r} - F(x(r, t)) \right) \end{cases} \quad (4.28)$$

ここで,  $E(v, w) = \varepsilon \log \cosh[(v - w)/\varepsilon]$ ,  $F(v) = (1 + e^{-(v-a)/\varepsilon})$ ,  $\lambda, a, \varepsilon > 0, \gamma > 1$  である. Eq.(4.28) はパラメータを適当に選べば, Sierpinski gasket パターンを解として形成する. 注意として, 逆超離散化されて差分方程式または微分方程式を導く際, それは一意的ではない. これは超離散方程式と元の微分方程式のパラメータが一対一対応しておらず, 対応にある程度任意性があることが原因であり, 例えば逆超離散化後の係数は一意には決まらない.

今回得られた時空パターンは Eq.(4.26) なる時間に対して二階の超離散方程式が基となっているが, このときの抑制因子に対する方程式は Eq.(4.25) で与えられてい

た. これを逆超離散化してみると,

$$\begin{aligned}
 V_j^{n+1} &= S + U_j^n (S = 3\Gamma - A) \\
 \Leftrightarrow \varepsilon \ln \frac{v_j^{n+1}}{\theta^{n+1}} &= \varepsilon \ln \frac{\Delta t \kappa \mu^n}{\theta^{n+1} \tau_v} + \varepsilon \ln \frac{u_j^n}{\mu^n} \\
 \Leftrightarrow \ln v_j^{n+1} &= \ln \Delta t \kappa - \ln \tau_v + \ln u_j^n \\
 \Leftrightarrow v_j^{n+1} &= \frac{\Delta t \kappa}{\tau_v} u_j^n \\
 \Leftrightarrow \tau_v \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} &= \kappa u_j^n - \frac{\tau_v}{\Delta t} v_j^n
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\tau_v \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \kappa u_j^n - \frac{\lambda}{1 - 3\theta} v_j^n \quad (4.29)$$

を得る. ただし,  $N = 0$  から得られる関係式  $\Delta t / \tau_v = (1 - 3\theta) / \lambda$  を用いた. ここで, もし  $\Delta t \rightarrow 0$  とすると,  $\theta \rightarrow 0$  となることから上記の差分方程式から微分方程式  $\tau_v \frac{dv}{dt} = \kappa u - \lambda v$  を得ことができるように思われる. しかしながら, これは  $1 - 3\theta = \lambda \Delta t / \tau_v$  に矛盾してしまう. したがって, われわれは上記の差分方程式を扱うことにする. この Eq.(4.29) は Eq.(4.6) の  $D_v, I \ll 1$  なる近似として得られる方程式である. この近似をおこなった, 反応拡散系 Eqs.(4.5), (4.29) は Eq.(1.1) に特別な場合として含まれることになるが, このときの解として, パルス自己複製は存在せず, したがって Sierpinski gasket は現れないことが知られている [20]-[23]. したがって, Case3 で導出した時空間パターンには, 自己複製は現れないことが予想される.

以上, Eq.(1.1) における解の性質と, 超離散系 Eq.(4.12), (4.16) との上記以外の関係性はほとんど明確になっていない. 今回超離散系で導出された時空間パターンは, 厳密な安定状態において記述されたものであり, かつ, そもそも超離散化を行うという事は, もとの微分構造を線形化し情報を簡潔にしまう (第2章). そのため, もとの微分方程式のパラメータの僅かな範囲内で見られる解の性質や, 安定から不安定へ変わるその境界部分の性質を再現するためには, 安定性以外の部分の超離散系の議論が必須である. その議論を行っていく中で, 付加条件 Eq.(4.23) の物理的意味や, Sierpinski gasket など, もとの反応拡散系の解に見られる離散構造の出現意味を見出すことが, 今後の課題となっていく.

## Chapter 5

### 総括

本論文では、時空間パターン現象を新たに解析する手法としての超離散法について述べてきた。

これまで多くの場合、超離散法は可積分系の方程式について適応されており、そこから新たな離散モデルを構築してきた。この際、可積分系では保存量が存在するため、これを軸に超離散化法による現象の解析が進んできた。一方、非平衡統計力学、非線形動力学の分野では、保存量をもたない方程式は数多く存在する。実際に第3、4章で超離散化を行った元の方程式 Eq.(3.1) や Eqs.(4.5), (4.6) は、保存量をもたない方程式である。今回これらの方程式を超離散化する最大の理由は、方程式において時空間セルオートマトンパターンとして表せる解の存在であった。超離散方程式はその代数構造上、セルオートマトンとの対応が直接行われる。第3章でみた双安定素子集団の方程式や第4章でみた反応拡散方程式はその解のパターンが完全にセルオートマトンで表せる。実際、Eq.(3.1) は Fig.3.7, Eqs.(4.5), (4.6) は特別な場合として Fig.1.5 の時空間セルオートマトンパターンを生み出す。しかしながら、もとの微分方程式からセルオートマトン解を解析的に導くことは困難であり、その微分方程式とセルオートマトンとの数学的関係性も明確ではない。

本論文における非平衡統計力学、非線形動力学における超離散化の研究は、この微分方程式とセルオートマトンとの関係性の解明に主眼を置いてきた。この解明にあたり第2章の数学的準備においては、得られた超離散方程式がセルオートマトンと対応づくかどうかをいくつかの例を基に議論した。

第3章の大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の振る舞いにおいては、現象を再現する力学系モデルにおける微差分方程式 Eq.(3.1) から、超離散化法を用いて得られる確率セルオートマトンモデル Eq.(3.39) の導出可能性を検討し、Eq.(3.39) が適当な確率関数を与えることで、既に発見的に得られているセルオートマトンモデルのダイナミクスを再現することを示した。さらに、セルオートマトンモ



デルと力学系モデルにおける相互作用の効果に違いが生まれることを示し、超離散化法によってパターン現象を見ることで、新たに現象解明につながる問題が提起されることを見た。

第4章では、超離散化の反応拡散系への応用を試みた。始めに、max-plus モデル (4.1) が BZ 反応に対する反応拡散系と関係していることを述べた。これは、連立超離散系によるモデルの構築を示唆させるものであった。そこで、非平衡開放系におけるパルスの伝搬を示す反応拡散系として、既に多くの研究がなされている反応拡散方程式 (1.1) に対して、これを一般化した方程式 (4.5), (4.6) をもとに超離散方程式の導出を試みた。Eq.(1.1) は、その解がセルオートマトンで表せることがすでに知られており、特にある条件の下では Sierpinski gasket なる自己相似パターンを作る。そこで今回、得られた連立超離散方程式 (4.12), (4.16) がセルオートマトンと対応付け可能であるための条件及び対応ついた解のセルオートマトンパターンを導出した。まず、時刻  $n$  で与えられた  $V_j^n$  に対し  $U_j^n$  から  $U_j^{n+1}$  への状態遷移 (Fig.4.2) を示すことで、セルオートマトンとの対応付けの条件 (4.21) 及び (4.22) を導出した。さらに (4.23) を加えると超離散方程式 (4.12), (4.16) から矛盾なくセルオートマトンパターンで表せる安定状態での解を得ることが出来た。そしてそれらのパターンは方程式 (4.12) 中のパラメータ  $M$  を変えることによって変化する。今回の議論では、不安定状態での議論がなされていないため、Fig.1.4 のようなフラクタルパターンの解は発見できなかった。この点については今後の課題としたい。

超離散化法の、非平衡、非線形系への適応及びそれによる現象を新たに解明する研究 [103]-[107] はまだあまり多くはないように思われる。本研究を通し、セルオートマトンで表現されるような時空間パターン形成現象と元の微分方程式との数学的関係性の理解は深まったものの、完全に超離散化によって関係性が解明されたわけではない。そもそも与えられた微分方程式に対する超離散化法自身の問題は、第2章の 2.2 または第3章の 3.4 の冒頭に述べたが、これらの数学的問題を解決したとしてもなお、超離散化後の方程式が局所線形的に現象のダイナミクスを見ていることから生じる情報の欠如により、元の微分方程式と食い違う部分が出てきてしまう。しかしながら、超離散化したデジタルの世界から簡略化して自然現象を見ることにより、現象をより簡単にとらえ解析することが可能となる。それによって第3, 4章でみたように、もとの微分系では見えない現象の新たな部分が発見できると思われる。今後、時空間パターン形成現象を新たな見方で解明する手法として、超離散化の研究が発展することが望ましい。

# Bibliography

- [1] L. S. Schulman and P. E. Seiden : Science **223** (1986) 425.
- [2] J. X. Prochaska, J. Christopher and A. M. Wolfe : Nature **423** (2003) 57.
- [3] T. A. Witten and L. M. Sander : Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1400.
- [4] L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann : Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 336.
- [5] 中谷宇吉郎 : 雪, 岩波新書 (1938).
- [6] M. V. Dyke : *An Album of Fluid Motion* (Parabolic Press, 1982).
- [7] P. Ball : *Nature's Patterns, Shapes, Flow, and Branches* (OXFORD University Press 2009).
- [8] G. K. Moe, W. C. Rheinbolt and J. A. Abildskov : Am. Heart J. **67** (1964) 200.
- [9] M. Gerhardt, H. Schuster and J. J. Tyson : Science **247** (1990) 1563.
- [10] S. Wolfram : Rev. Mod. Phys. **55** (1983) 601.
- [11] S. Wolfram : *Cellular Automata and Complexity* (Addison-Wesley, 1994).
- [12] S. Wolfram : *A New Kind of Science* (Wolfram Media Inc., 2002).
- [13] E. Meron : Phys. Rep. **218** (1992) 1.
- [14] V. Petrov, S. K. Scott and K. Showalter : Philos. Trans. R. Soc. London A **347** (1994) 631.
- [15] G. Nicolis : *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge University Press, 1995).
- [16] T. A. Winfree : Sci. Am. **230** (1974) 82.
- [17] R. Kobayashi, T. Ohta and Y. Hayase : Phys. Rev. E **50** (1994) R3291.

- [18] T. Ohta, Y. Hayase and R. Kobayashi : Phys. Rev. E **54** (1996) 6074.
- [19] 太田隆夫 : 非平衡系の物理学, 裳華房 (2000).
- [20] Y. Hayase : J. Phys. Soc. Jpn. **66** (1997) 2584.
- [21] T. Ohta, J. Kiyose and M. Mimura : J. Phys. Soc. Jpn. **66** (1997) 1551.
- [22] Y. Hayase and T. Ohta : Phys. Rev. Lett. **24** (1998) 1726.
- [23] Y. Hayase and T. Ohta : Phys. Rev. E **62** (2000) 5998.
- [24] J. Feder : *Fractals* (Plenum Press, 1988).
- [25] K. J. Falconer : *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge University Press, 1985).
- [26] B. B. Mandelbrot : *Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension* (Flammarion, 1975).
- [27] B. B. Mandelbrot : *Fractals: Form Chance and dimension* (W.H.Freeman & Co, 1977).
- [28] B. B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature* (W.H.Freeman & Co, 1982).
- [29] V. B. Kazantsev and V. I. Nekorkin : Phys. Rev. E **68** (2003) 017201.
- [30] V. I. Nekorkin, D. S. Shapin, A. S. Dmitrichev, V. B. Kazantsev, S. Binczak and J. M. Bilbault : Physica D **237** (2008) 2463.
- [31] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma : Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247.
- [32] 広田良吾, 高橋大輔 : 差分と超離散, 共立出版 (2003).
- [33] D. J. Korteweg and G. de Vries : Phil. Mag. **39** (1985) 422.
- [34] 和達三樹 : 非線形波動, 岩波書店 (2000).
- [35] D. Takahashi and J. Satsuma : J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514.
- [36] Y. Itoh : Prog. Theor. Phys. **78** (1987) 507.
- [37] R. Hirota and S. Tsujimoto : J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 3125.

- [38] D. Takahashi, A. Shida and M. Usami : J. Phys. A **34** (2001) 10715.
- [39] 村田実貴生, 超離散反応拡散系, 応用力学研究所研究集会報告 No. 25AO-S2 「非線形波動研究の拡がり」 : Report of RIAM Symposium No. 25AO-S2 (2012).
- [40] M. Murata : J. Differ. Equ. **19** (2013) 1008.
- [41] K. Matsuya and M. Murata : Discrete Contin. Dyn. Syst. B **20** (2015) 173.
- [42] B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. Woude: *Max Plus at Work* (Princeton University Press, 2006).
- [43] K. G. Wilson and G. Kogut : Phys. Report C **12** (1974) 75.
- [44] S. K. Ma : *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin, 1976).
- [45] L. Schwartz (小島順他訳) : シュヴァルツ解析学, 東京図書 (1967).
- [46] J. デュユドネ (森毅訳) : 現代解析の基礎, 東京図書 (1986).
- [47] 江田勝哉 : 数理論理学, 内田老鶴圃 (2010).
- [48] R. Hirota and H. Yahagi, J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 2867.
- [49] 広田良吾 : 差分方程式講義, サイエンス社 (2000).
- [50] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, D. Takahashi and K. M. Tamizhmani : Phys. Lett. A **226** (1997) 53.
- [51] D. Takahashi, T. Tokihiro, B. Grammaticos, Y. Ohta and A. Ramani : J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997) 7953.
- [52] A. Ramani, D. Takahashi, B. Grammaticos and Y. Ohta : Physica D **114** (1998) 185.
- [53] A. Gathmann : arXiv:math/0601322v1 [math.AG].
- [54] M. Gross : *Tropical Geometry and Mirror Symmetry* (American Mathematical Society, 2011).
- [55] L. Landau and E. Lifshitz (小林秋男他訳) : 統計物理学, 岩波書店 (1980).
- [56] 久保亮五他 : 統計物理学 (現代物理学の基礎), 岩波書店 (1972).
- [57] S. M. Allen and J.W. Cahn : Acta Met. **20** (1972) 423.

- [58] J. W. Cahn and S. M. Allen : J. de Physique **38** (1977) C7-51.
- [59] S. M. Allen and J. W. Cahn : Acta Met. **27** (1979) 1085.
- [60] P. Langevin : C. R. Acad. Sci. **146** (1908) 530.
- [61] K. Kawasaki : J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6** (1973) 1289.
- [62] K. Pearson : Nature **72** (1905) 294.
- [63] V. Kampen : *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, 1992).
- [64] K. Nishinari and D. Takahashi : J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 5439.
- [65] L. Landau and E. Lifshitz : *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)* (Butterworth-Heinemann, 1987).
- [66] 巽友正 : 流体力学, 培風館 (1982).
- [67] R. Hirota : J. Phys. Soc. Jpn. **46** (1979) 312.
- [68] K. Nishinari and D. Takahashi : J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 93.
- [69] Y. Yamazaki and A. Toda : J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 2342.
- [70] Y. Yamazaki and A. Toda : Physica D **214** (2006) 120.
- [71] Y. Yamazaki : Prog. Theor. Phys. **125** (2011) 641.
- [72] Y. Urahama : J. Adhes. **31** (1989) 47.
- [73] Y. Yamazaki and A. Toda : J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 1618.
- [74] K. R. Shull, C. M. Flanigan and A. J. Crosby : Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 3057.
- [75] A. Ghatak, M. K. Chaudhury, V. Shenoy and A. Sharma : Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4329.
- [76] Y. Yamazaki, K. Yamamoto, D. Kadono and A. Toda : J. Phys. Soc. Jpn. **81** (2012) 043002.
- [77] M. Murata : J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 255202.
- [78] 森肇, 蔵本由紀 : 散逸構造とカオス, 岩波書店 (2000).

- [79] 川崎恭治 : 非平衡と相転移, 朝倉書店 (2000).
- [80] A. Schadschneider and M. Schreckenberg : J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) 679.
- [81] D. Stauffer and A. Aharony : *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, 1994).
- [82] E. Domany and W. Kinzel : Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 311.
- [83] W. Kinzel : Z. Phys. B **58** (1985) 229.
- [84] 今野紀雄 : 無限粒子系の科学, 講談社 (2008).
- [85] N. Konno, T. Kunitatsu and X. Ma : Appl. Math. Comput. **155** (2004) 727.
- [86] D. Henry : *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations* (Springer, 1981).
- [87] R. C. Casten and J. C. Holland : J. Diff. Eqs. **27** (1978) 266.
- [88] H. Matano : Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979) 401.
- [89] 西浦廉政 : 非平衡ダイナミクスの数理, 岩波書店 (2009).
- [90] B. P. Belousov : С б о р н и к р е ф е р а т о в п о р а д и а ц и о н н о й м е д и ц и н е **147** (1959) 145.
- [91] A. M. Zhabotinsky : Б и о ф и з и к а **9** (1964) 306.
- [92] R. J. Field and H. D. Foersterling : J. Phys. Chem. **21** (1986) 90.
- [93] P. Gray and S. K. Scott : J. Phys. Chem. **89** (1985) 22.
- [94] 高橋大輔, 木村欣司, セルオートマトンと差分方程式, 数理解析研究所講究録 **117** (2000) 119.
- [95] 志田篤彦, 高橋大輔, あるパターン方程式のダイナミクス, 数理解析研究所講究録 **1221** (2001) 166.
- [96] R. J. Field, E. Koros and R. M. Noyes : J. Am. Chem. Soc. **94** (1972) 8649.
- [97] Y. Kuramoto : *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, 1984).

- [98] M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani and B. Grammaticos : J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 315203.
- [99] 松家敬介, 離散 Gray-Scott モデルの解の収束について, 応用力学研究所研究集会報告 No. 25AO-S2 「非線形波動研究の拡がり」 : Report of RIAM Symposium No. 25AO-S2 (2014).
- [100] A. Nobe, J. Satsuma and T. Tokihiro : J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) L371.
- [101] W. Kunishima, A. Nishiyama, H. Tanaka and T. Tokihiro : J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 2033.
- [102] A. Nishiyama, H. Tanaka and T. Tokihiro : Physica A **387** (2008) 3129.
- [103] T. Nagatani : Phys. Rev. E **58** (1998) 700.
- [104] H. Katsuragi and H. Honjo : Phys. Rev. E **67** (2003) 011601.
- [105] H. Katsuragi and H. Honjo : J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 3087.
- [106] K. Suzuki : Interdisciplinary Information Science **17** (2011) 131.
- [107] S. Gibo and H. Ito : J. Theor. Biol. **378** (2015) 89.

# 研究業績

## 論文 (査読あり)

- 1) S. Ohmori and Y. Yamazaki : Cellular automata for spatiotemporal pattern formation from reaction-diffusion partial differential equations, J. Phys. Soc. Jpn. **85** (2016) 014003.
- 2) S. Ohmori and Y. Yamazaki : Discussion of a stochastic cellular automaton model for the dynamics of bistable units with global and asymmetric local interactions, Advance in Science, Technology and Environmentology, Special Issue on New Challenges in Complex Systems Science (NCCSS), Vol. B11 (2015) 157.
- 3) S. Ohmori and Y. Yamazaki : Derivation of a stochastic cellular automaton model for the dynamics of bistable units with global and asymmetric local interactions, Prog. Theor. Exp. Phys. (2014) 083A01.

## 論文 (査読なし)

- 1) A. Kitada, T. Yamamoto and S. Ohmori : A dendrite generated from  $\{\text{Adenine, Guanine, Cytosine, Thymine}\}^\Lambda$ ,  $Card\Lambda > \aleph$ , Condensed-Matter ScienceReports (CMSR), **2** (2013) 1.
- 2) A. Kitada, T. Yamamoto, S. Ohmori and Y. Yamazaki : On a difference in topological nature between Cantor middle-third set and Sierpinski carpet, Condensed-Matter ScienceReports (CMSR), **2** (2013) 5.
- 3) A. Kitada, T. Yamamoto and S. Ohmori : A mathematical summary common to the two papers (CMSR 2 (2013) 1,5), Condensed-Matter ScienceReports (CMSR), **2** (2013) 11.
- 4) A. Kitada, T. Yamamoto, S. Ohmori and T. Yoshioka : Existence of a sequence  $\{\mathcal{D}^i\}$  composed of self-similar spaces where each  $\mathcal{D}^{i+1}$  is a coarse graining of  $\mathcal{D}^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , Condensed-Matter ScienceReports (CMSR), **1** (2012) 1.
- 5) A. Kitada, S. Ohmori and T. Yamamoto : Existence of a space filled with an arbitrary finite number of mutually disjoint self-similar spaces, arXiv:1507.06642v1 [math.GN] 2015.
- 6) A. Kitada, S. Ohmori and T. Yamamoto : A not metrizable space filled with any  $n$  mutually disjoint self-similar spaces, arXiv:1502.05109v1 [math.GN] 2015.
- 7) A. Kitada, S. Ohmori and T. Yamamoto : A product space of  $\{0, 1\}$  and an abstract polycrystal, arXiv:1412.2474v2 [math.GN] 2014.



- 8) A. Kitada, T. Yamamoto and S. Ohmori : A dendrite generated from  $\{0, 1\}^\Lambda$ ,  $Card\Lambda > \aleph$ , arXiv:1402.7309v1 [math.GN] 2014.
- 9) A. Kitada, T. Yamamoto, S. Ohmori and Y. Yamazaki : On a difference in topological nature between Cantor middle-third set and Sierpinski carpet, arXiv:1402.7290v2 [math.GN] 2014.
- 10) A. Kitada, T. Yamamoto, S. Ohmori and Y. Yamazaki : On the Existence of a Self-Similar Coarse Graining of a self-Similar Space, arXiv:1107.4168v2 [math.GN] 2011.

## 学会発表

- 1) 大森祥輔, 山崎義弘, 「大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の、確率セルオートマトンに基づく考察」 2015 年日本応用数理学会年会 (金沢大学).
- 2) 大森祥輔, 山崎義弘, 「大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の、確率セルオートマトンに基づく考察」 2015 年日本物理学会第 70 回年次大会 (早稲田大学).
- 3) 大森祥輔, 山崎義弘, 「大域的かつ非対称局所的に相互作用した双安定素子集団の力学系モデルに対する、超離散化法による考察」 2014 年日本物理学会秋季大会 (中部大学).
- 4) 大森祥輔, 「超離散化法を用いた大域的かつ非対称局所的な力学系モデルの考察」 卓越した大学院拠点形成支援事業 シンポジウム (早稲田大学) (2013).
- 5) 大森祥輔, 山崎義弘, 「超離散化法を用いた、大域的かつ非対称局所的な力学系モデルの考察」 2013 年日本物理学会秋季大会 (徳島大学).
- 6) 大森祥輔, 山本知之, 山崎義弘, 北田韶彦, 「自己相似構造の粗視化について III」 2013 年日本物理学会第 68 回年次大会 (広島大学).
- 7) 大森祥輔, 山崎義弘, 山本知之, 北田韶彦, 「自己相似構造の粗視化について II」 2012 年日本物理学会秋季大会 (横浜国立大学).
- 8) 大森祥輔, 山本健, 山崎義弘, 北田韶彦, 「自己相似構造の粗視化について」 2012 年日本物理学会第 67 回年次大会 (関西学院大学).
- 9) 大森祥輔, 吉岡剛志, 山本知之, 北田韶彦, 「その粗視化がフラクタルとなるようなフラクタルの存在」 2011 年日本物理学会秋季大会 (富山大学).
- 10) 北田韶彦, 小笠原義仁, 吉岡剛志, 大森祥輔, 「自己相似空間の自己相似粗視化とその物質科学における実際」 2010 General Topology Symposium (筑波大学).
- 11) 大森祥輔, 北田韶彦, 山本知之, 「物質の自己相似性を保った coalescence 過程について」 2010 年秋日本数学会 (名古屋大学) トポロジー分科会.

## ポスター発表

- 1) 大森祥輔, 山崎義弘, 「反応拡散系に基づく Cellular Automaton を用いた時空パターン形成」 MIMS 共同研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」(明治大学) (2015).
- 2) Shousuke Ohmori: Discussion of a stochastic cellular automaton model for the dynamics of bistable units with global and asymmetric local interactions, New Challenges in Complex Systems Science, Waseda Univ., Tokyo (2014).
- 3) 大森祥輔, 「超離散化法を用いた、大域的かつ非対称局所的な力学系モデルの考察」第2回凝縮系物質科学研究所 若手の会(早稲田大学) (2013).

# 謝辞

本研究の遂行、及び博士論文の執筆に当たり、早稲田大学理工学術院 山崎義弘教授には懇切丁寧なご指導ご鞭撻を賜りました。また、これまで研究指導ならび物理学研究における考え方等、多くの事をご教示頂きました。博士論文をまとめあげることが出来たのも、山崎義弘教授のおかげです。深く感謝申し上げます。本論文の審査にあたり、早稲田大学理工学術院 大谷光春教授、栗原進教授、高橋大輔教授、原山卓久教授、湯浅一哉教授には、ご多用の中有益なご教示を賜りました。心から厚く御礼申し上げます。また、これまで研究会等におきまして、多くの有益なご助言、激励を賜りました、早稲田大学理工学術院 伊藤公久教授、小山泰正教授、山中由也教授、渡邊孝信教授に深く御礼申し上げます。早稲田大学理工学術院 山本知之教授には、学部、修士課程に在学中の頃より、多くのご指導ご鞭撻を賜りました。また、研究者としての心構え等、ご教示頂きました。深く感謝申し上げます。故北田韶彦早稲田大学名誉教授には、自然科学における新しい概念の創作の重要性とその創作結果を伝えることの難しさ、そして生涯研究者であり続けることの難しさ等、大学入学時からこれまで多大なご助言、ご教示を賜りました。心から感謝申し上げるとともに、急逝されたことが残念でなりません。

また、山崎研究室の卒業生である山本健博士、山本研究室の吉岡剛志博士には、学問の範囲にとどまらず公私共に多くのご指導ご鞭撻を賜りました。心から感謝の意を表します。山崎研究室所属の方々にも、様々なご協力を頂きました。感謝申し上げます。

2016年1月

大森祥輔