

卒業論文

勾配情報を考慮できる粒子群最適化による制約 付き数理最適化問題の解の探索

Chemoinformatics Using Feature Selection and Clustering for
Enzyme Commission Number Prediction in Organic Synthesis

富山県立大学 工学部 情報システム工学科

2120019 柴原壮大

指導教員 奥原 浩之 教授

提出年月: 2024年2月

目 次

図一覧	ii
表一覧	iii
記号一覧	iv
第1章 はじめに	1
§ 1.1 本研究の背景	1
§ 1.2 本研究の目的	2
§ 1.3 本論文の概要	2
第2章 多目的最適化の粒子群最適化	3
§ 2.1 粒子群最適化アルゴリズム	3
§ 2.2 制約がある場合の PSO	5
§ 2.3 多目的最適化のパレート解	8
第3章 能力開発のための学習支援システム	9
§ 3.1 接遇マナーと向上のためのアプリ	9
§ 3.2 様々なケースにおける問題自動生成	9
§ 3.3 学習支援における臨場感の提供	9
第4章 提案手法	10
§ 4.1 問題に対する正誤データの蓄積	10
§ 4.2 収集されたデータの傾向と理解度の可視化	10
§ 4.3 能力開発のための教育システムの仕組みの概要	10
第5章 数値実験並びに考察	11
§ 5.1 数値実験の概要	11
§ 5.2 実験結果と考察	11
第6章 おわりに	12
謝辞	13
参考文献	14

図一覧

表一覽

記号一覧

以下に本論文において用いられる用語と記号の対応表を示す.

用語	記号
LiNGAM における i 番目の観測変数	x_i
LiNGAM における j 番目の観測変数から i 番目の観測変数へのパス係数	b_{ij}
LiNGAM における i 番目の観測変数に対する誤差（非観測変数）	e_i
主問題における各入力に対する重み	v^T
主問題における各出力に対する重み	u^T
主問題における対象 DMU の評価値	z
CCR モデルにおける DMU _o の入力	x_o
CCR モデルにおける DMU _o の出力	y_o
CCR モデルにおける DMU の入力	X
CCR モデルにおける DMU の出力	Y
双対問題における対象 DMU の評価値	w
入力指向モデルにおける対象 DMU の評価値	θ
入力指向モデルにおける各 DMU に対する重み	λ
出力指向モデルにおける対象 DMU の評価値	η
出力指向モデルにおける各 DMU に対する重み	μ
入力指向モデルにおける対象 DMU の i 番目の入力に対する改善案	\hat{x}_i
入力指向モデルにおける参照集合内の k 番目の DMU の i 番目の入力	x_{ik}
入力指向モデルにおける参照集合内の k 番目の DMU に対する重み	λ
出力指向モデルにおける対象 DMU の j 番目の出力に対する改善案	\hat{y}_j
出力指向モデルにおける参照集合内の k 番目の DMU の j 番目の出力	y_j
出力指向モデルにおける参照集合内の k 番目の DMU に対する重み	μ
提案手法における d 番目の市区町村の i 番目の入力	x_{id}
提案手法における d 番目の市区町村の i 番目の出力	y_{id}
提案手法における d 番目の市区町村に対する重み	λ_d
$robust Z - score$ における正規化後の値	ι
$robust Z - score$ を用いて正規化するデータ集合内の値	x
$robust Z - score$ を用いて正規化するデータ集合	X
$robust Z - score$ を用いて正規化するデータ集合の中央値	$median(x)$
$robust Z - score$ を用いて正規化するデータ集合の正規四分位範囲	$NIQR$
0～1 変換の結果の値	ι'
0～1 変換を行うデータ集合内の値の最大値	$max \iota $

はじめに

§ 1.1 本研究の背景

近年、コンピュータサイエンスの発展は、ハードウェアとソフトウェアの進化により、さまざまな分野で顕著な成果を上げている。特に、処理能力の向上やアルゴリズムの革新によって、大規模な最適化問題に対するアプローチが進展し、実世界での適用範囲が拡大している。これに伴い、複雑で高次元な問題を効率的に解く技術の需要が急速に高まっている。

中でも、大規模なデータ処理や最適化問題は、企業や研究機関において重要な課題となっており、解決策としての最適化技術の有効性が強調されている。たとえば、ソーシャルネットワークサービス（SNS）の普及により、膨大な量のログデータや通信パスの解析が求められ、これらのデータの中から有用な情報を抽出するためには、非常に高度で効率的な最適化技術が必要とされる。さらに、IoT（モノのインターネット）やビッグデータの普及により、処理対象となるデータ量やネットワーク規模が爆発的に増加しており、従来のアルゴリズムでは計算時間やメモリの制約が大きな課題となることが多い。

また、科学技術計算やエンジニアリング分野においても、大規模なシミュレーションやデータ分析が求められるシーンが増えており、これらに対する効率的な最適化手法の開発は、ますます重要となっている。特に、エネルギー消費の最適化や製造業における生産計画、交通システムの最適化など、実際の現場における最適化問題では、多くの制約条件や競合する目標が存在し、解法の選定が非常に難しくなっている。

最新のコンピュータ技術においても、これらの問題を解決するためには膨大な計算リソースと時間が必要であり、従来のアルゴリズムでは計算時間の長期化や収束性の低下が問題となる場合が多い。したがって、計算資源を効率的に活用し、短時間で最適解を見つけるための新たな手法が求められている。

このような背景を踏まえ、複雑で高次元な最適化問題を解決するために、粒子群最適化（PSO）などの群知能に基づくアルゴリズムが注目されており、其有効性は多くの実際の問題において証明されている。しかし、PSOのような進化的手法には、局所的最適解に陥るリスクや、計算の収束速度が遅くなる課題が依然として存在するため、これらの問題を改善するためのさらなる研究が必要とされている。

§ 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、数ステップでもっとも最適な解が見つかる新しいハイブリッド動的システムを実際の多目的最適化問題に適応する。つまり上下限制約条件付き最適化問題に対し直接適用可能な勾配情報を追加した粒子群最適化アルゴリズムを活用し、それを拡張することで、多目的スケジューリング問題へ組み込みを行う。

§ 1.3 本論文の概要

本論文は次のように構成される。

第1章 本研究の背景と目的について説明する。背景では、昨今における、教育におけるデジタルトランスフォーメーションの例について説明している。目的では、医療分野に対する、マルチエージェントシミュレータを用いたデジタルトランスフォーメーションについて述べている。

第2章

第3章

第4章

第5章

第6章 本論文における前章までの内容をまとめつつ、本研究で実現できたことと今後の展望について述べる。

多目的最適化の粒子群最適化

§ 2.1 粒子群最適化アルゴリズム

Swarm Intelligence (群知能) は、鳥や魚、アリのコロニーなどのグループの行動に基づく最適化手法である。この技術の一つである粒子群最適化が開発され、様々な研究に応用されている。しかし、粒子群最適化の収束は根拠がない。本研究では、より良い最適解を求めるための群知能とニューラルネットワークダイナミックスの新しいハイブリッド動的システムを提案した。本節では主な結果として、粒子群最適化と勾配法のメカニズムを理論的にどのように組み合わせるかを示し、今後は提案システムが客観的な環境のグローバルな情報に基づいて補間探索を実現できることを確認する。

粒子群最適化 (Particle Swarm Optimization : PSO) は、群の中の固体（粒子）が持つ最良の情報とそのグループの最適値から過去の探索から考慮した確率的最適化手法であり、ケネディ [38] が社会的行動に基づいて開発した並列進化計算技術である。社会的方法と計算方法の両方を扱う PSO に関する標準的な研究がある [39]。本節では数ステップでもっとも最適な解が見つかる新しいハイブリッド動的システムを提供する。そこで連続 PSO アルゴリズムに勾配法を組み込み、定式化を行う。そこで、提案した手法の有効性を示す。その後、提案した PSO の手法を用いて取得したログのクラスタリングを行い、その結果を示す。

PSO は群を成して移動する生物の行動を模範したアルゴリズムである。群をなす生物を粒子としてモデル化し、粒子は最適化問題における候補解を示している。PSO は群の中の粒子がもつ最良の情報とその集団の最適値から過去の探索を考慮し、さらにその集団の各粒子の位置および速度を更新することによって計算される。以下に PSO の解説を示す（図 1 参照）。ここで、PSO の探索模式図及び速度と位置の更新式より、各粒子が持つ最良の情報に向かう力、集団の最適値に向かう力、これまでの進行方向へ向かう力の 3 つのベクトルを合成して速度ベクトルを決定し、それを元に次に移動する位置を決定する [3]

$$x_p^{k+1} = x_p^k + v_d^{k+1} \quad (2.1)$$

$$v_p^{k+1} = wv_p^k + c_1r_1(x_{pbest} - x_p^k) + c_2r_2(x_{gbest} - x_p^k) \quad (2.2)$$

PSOの更新式

PSOの更新式

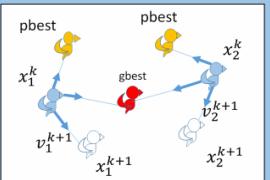
$$x_d^{k+1} = x_d^k + v_d^{k+1}$$

$$v_d^{k+1} = \omega v_d^k + c_1 r_1 (x_{db}^k - x_d^k) + c_2 r_2 (x_{gb}^k - x_d^k)$$

記号

x_d^k :位置
 v_d^k :速度
 w_d^k :運動量
 x_{db}^k :p-best(各個体の過去の最良個体)
 x_{gb}^k :g-best(集団の中の最良個体)
 r_1, r_2 :0から1のパラメータ
 c_1, c_2 :調整パラメータ

更新の様子



粒子の探索の様子

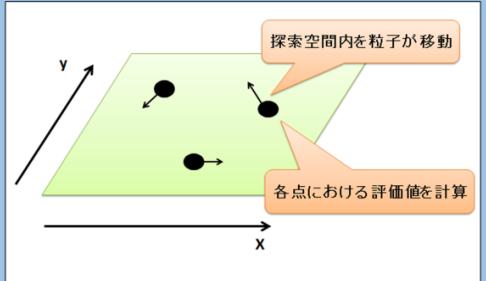


図1 PSO の更新式

ここで、 x_d^k は粒子の位置、 v_d^k は速度、 w は慣性係数、 c_1 と c_2 は学習係数、 r_1 と r_2 はランダムな数値である。PSO の速度ベクトルは、 p_{best} に向かうベクトル、 g_{best} に向かうベクトル、そして過去の進行方向に基づくベクトルの合成によって決定される。

ここで、PSO の探索模式図及び速度と位置の更新式より、 p_{best} 向かう $c_1 r_1 (x_d^k - x_d^k)$ 、 g_{best} 向かう $c_2 r_2 (x_d^k - x_d^k)$ 、これまでの進行方向へ向かう $w v_d^k$ の3つのベクトルを合成して速度ベクトル v_i^{k+1} を決定し、それを元に次に移動する位置 x_d^{k+1} を決定する。PSO の探索式はランダム要素を含み、同時に最良解情報である p_{best} と g_{best} が探索に伴い変化するという時変性を有している [?]. このままの形では理論解析が困難であるので、一つの粒子 (Particle) に着目し、一次元の位置 x と速度 v について考え、さらに p_{best} と g_{best} を一つの点に縮約した簡略モデルが提案されている [?]. この簡略モデルは、確定的な線形時不变システムとして表現されており、その安定性を示す。

粒子 i に注目すると速度ベクトル v_{k+1} は以下の式のように変形できる。ステップ幅 φ は二つの一様乱数を足し合わせたものであり、最小値 0、最大値 $C_1 + C_2$ 、平均 $\frac{C_1 + C_2}{2}$ の分布に従う。

$$v_{k+1} = w v_k + \varphi (P - x_k) \quad (4.3)$$

ここで、 P は以下のように定義される：

$$P = \frac{\varphi_1 p_{\text{best}}^k + \varphi_2 g_{\text{best}}^k}{\varphi_1 + \varphi_2} \quad (4.4)$$

また、 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 、 $\varphi_1 = C_1 \text{rand}$ 、 $\varphi_2 = C_2 \text{rand}$ とし、さらに $y_k = P - x_k$ とおくと、以下のように表せる。 $\varphi = \frac{C_1 + C_2}{2}$ と見なすと固有値 λ は以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} v_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & \varphi \\ -w & 1 - \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

したがって、固有値 λ は次のように表される：

$$\lambda = w + 1 - \varphi \pm \sqrt{(w + 1 - \varphi)^2 - 4w^2}/2 \quad (4.6)$$

よって、 $\lambda = 1$ を境にシステムの特性が安定・不安定（収束・発散）に変化することが分かる。

§ 2.2 制約がある場合の PSO

PSO の更新式を力学系モデルとみなし、その連続化を試みると、

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = c \int_0^t e^{-a(t-\tau)} [F_p(x_p(\tau), \tau) + C(x_p(\tau), \tau)] d\tau \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2x_p(t)}{dt^2} + a \frac{dx_p(t)}{dt} = c [F_p(x_p(t), t) + C(x_p(t), t)] \quad (4.23)$$

またそれぞれの関数 F_p と C は以下のようになる。

$$F_p(x_p, t) = c_1(x_{pbest} - x_p) \quad (4.24)$$

$$C_p(x_p, t) = c_2(x_{gbest} - x_p) \quad (4.25)$$

また、2階微分方程式で表される連続時間系モデルの状態変数表現を

$$u_p(t) = x_p(t), \quad v_p(t) = \frac{du_p(t)}{dt} + au_p(t) \quad (2.3)$$

とおいて導入すると、離散時間系に対応した連続系の内部状態表現モデルは、

$$\frac{du_p(t)}{dt} = -au_p(t) + v_p(t) \quad (4.26)$$

$$\frac{dv_p(t)}{dt} = c [F_p(u_p(t), t) + C(u_p(t), t)] \quad (4.27)$$

連続型 PSO アルゴリズム (Continuous Particle Swarm Optimization; CPSO) について述べる。ベクトル y と $\text{sgn}(y)$ の要素によって与えられる対角要素を持つ対角行列を $\text{diag}[y]$ とする。ここで、 $\text{sgn}(y) = 1$ の場合は $y > 0$ であり、 $\text{sgn}(y) = -1$ の場合は $y < 0$ とする。したがって、正の定数であると仮定すると、最小化のために x_p の進化を近似することが提案される。また、CPSO の安定性解析も議論されている [?].

状態変数 x_p, v_p, x_{pbest} はベクトルではなく、以前に定義された適切な次元の行列であるため、上記の表記法は標準状態空間表記法ではない。また以下に CPSO の位置と速度の更新

式(式(4.7), 式(4.8))とアルゴリズムについて示す。問題解決の実行可能領域を考え、行列による連続時間 PSO 動力学を示す(式(4.9), 式(4.10), 式(4.11))。

CPSO アルゴリズム

1. x_p, v_p とパラメータ c_1, c_2, β, a の初期値を設定する。
2. x_{pbest}, x_{gbest} の初期値を導出する。
3. \dot{v} を計算して、 v_p を更新する。
4. x_p を更新して X_{db}, X_{gb} を評価する。
5. 収束すると仮定した場合は終了し、それ以外の場合は3から繰り返す。

$$\dot{x} = v_p \quad (4.7)$$

$$\dot{v} = -\beta v_p + c_1(x_{pbest} - x_p) + c_2(x_{gbest} - x_p) \quad (4.8)$$

$$x_{pbest} = a(x_p - x_{pbest}) [I_n + \text{diag}[\text{sgn}(F(x_{gbest}) - F(x_p))]] \quad (4.9)$$

$$x_{gbest} = x_{pbest} Q_j \quad (4.10)$$

$$j = \arg \min_{0 < i \leq n} (f(x_{pbesti})) \quad (4.11)$$

本節では CPSO に勾配情報の要素を加えた勾配 PSO について解説する。PSO の応用法である CPSO の応用法であり、行列 x_p, y_p に加えて z_p を加え、いくつかのパラメータを与えて再急降下法を用いる。以下は z_p を表す式である。

$$z_p = c_1 i(x_{pbest} - x_p) + c_2(x_{gbest} - x_p) + c_3(x_u) \quad (4.12)$$

以下の条件を考慮する(式(4.13))。 X_0 は初期位置行列である。

$$x_p = x_0 + \int_0^t v(s) ds \quad (4.13)$$

よって勾配 PSO の更新式を以下に示す。ここでは $x_p, v_p, x_{pbest}, x_{gbest}$ の次元は簡略化のため省略する。

$$\dot{x} = v_p \quad (4.14)$$

$$\dot{v} = -\beta v_p + z_p \quad (4.15)$$

$$\dot{z} = c_1(x_{pbest} - \dot{x}) + c_2(\dot{x}_{gbest} - \dot{x}) + c_3(\dot{x}_u) \quad (4.16)$$

$$x_{pbest} = a(x_p - x_{pbest}) [I_n + \text{diag}[\text{sgn}(F(x_{gbest}) - F(x_p))]] \quad (4.17)$$

$$x_{gbest} = x_{pbest} Q_j, \quad j = \arg \min_{0 < i \leq n} f(x_{pbesti}) \quad (4.18)$$

β, c_1, c_2, c_3 などの実数は、PSO と勾配情報を調整するために重み付けするパラメータである。 x_u はニューラルネットワークのダイナミクスに由来する新しい行列である。 x_u は以下で定義する。

$$x_{u_i} = -C \sum_{i=1}^n \frac{\partial E(y_p i(t))}{\partial y_p i} \frac{\partial f(x(t))}{\partial x p_i} \quad (4.19)$$

$$\dot{y}_p i = -\beta x_p i(t) + z_p i(t) \quad (4.20)$$

$$y_p i(t) = f(x_p i(t)) \quad (4.21)$$

勾配情報を加えると、モデルは以下のようになる。

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = c \int_0^t e^{-a(t-\tau)} [F_p(x_p(\tau), \tau) + C(x_p(\tau), \tau) - \nabla E(x_p(\tau), \tau)] d\tau \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2 x_p(t)}{dt^2} + a \frac{dx_p(t)}{dt} = c [F_p(x_p(t), t) + C(x_p(t), t) - \nabla E(x_p(t), t)] \quad (4.29)$$

またそれぞれの関数は以下のようになる。

$$F_p(x_p, t) = c_1(x_{pbest} - x_p) \quad (4.30)$$

$$C_p(x_p, t) = c_2(x_{gbest} - x_p) \quad (4.31)$$

$$\nabla E(x_p, t) = c_3 \frac{\partial E(x_p, t)}{\partial x_p} \quad (4.32)$$

解説したままのモデルでは無制約なので、制約条件に対応したモデルである上下制約連続時間 PSO モデルを以下の式に示す。

上下制約付最適化問題は次のように表される。上下制約領域内に問題の変数を変換して無制約化した新たな変数空間に無制約 PSO モデルを適用した「変数変換モデル」を導入する。非線形変数変換モデルを作成するために、

$$x_i = f_i(y_i) = \frac{q_i + p_i e^{-y_i}}{1 + e^{-y_i}} \quad (4.35)$$

とおく。この変換式を制約条件付き問題に代入して変数 x を消去すると、

$$\min E(f(y)) \quad (4.36)$$

を得ることができる。よって式 (4.29) に対応させると、

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + a \frac{dy_p(t)}{dt} = c [F_p(y_p(t), t) + C_p(y_p(t), t) - \nabla E(y_p(t), t)] \quad (4.37)$$

またそれぞれの関数は以下のようになる。

$$F_p(y_p, t) = c_1(y_{p\text{best}} - y_p)) \quad (4.38)$$

$$C_p(y_p, t) = c_2(y_{g\text{best}} - y_p)) \quad (4.39)$$

$$\nabla E(y_p, t) = c_3 \frac{\partial E(y_p, t)}{\partial y_p} \quad (4.40)$$

次にプログラムへの実装を考えた時に、連続式のままではプログラムに実装することが難しいので、オイラー法を用いて連続式を離散化し非線形変数変換モデルの離散化 PSO を作成する。それぞれに対応する式を以下に示す。

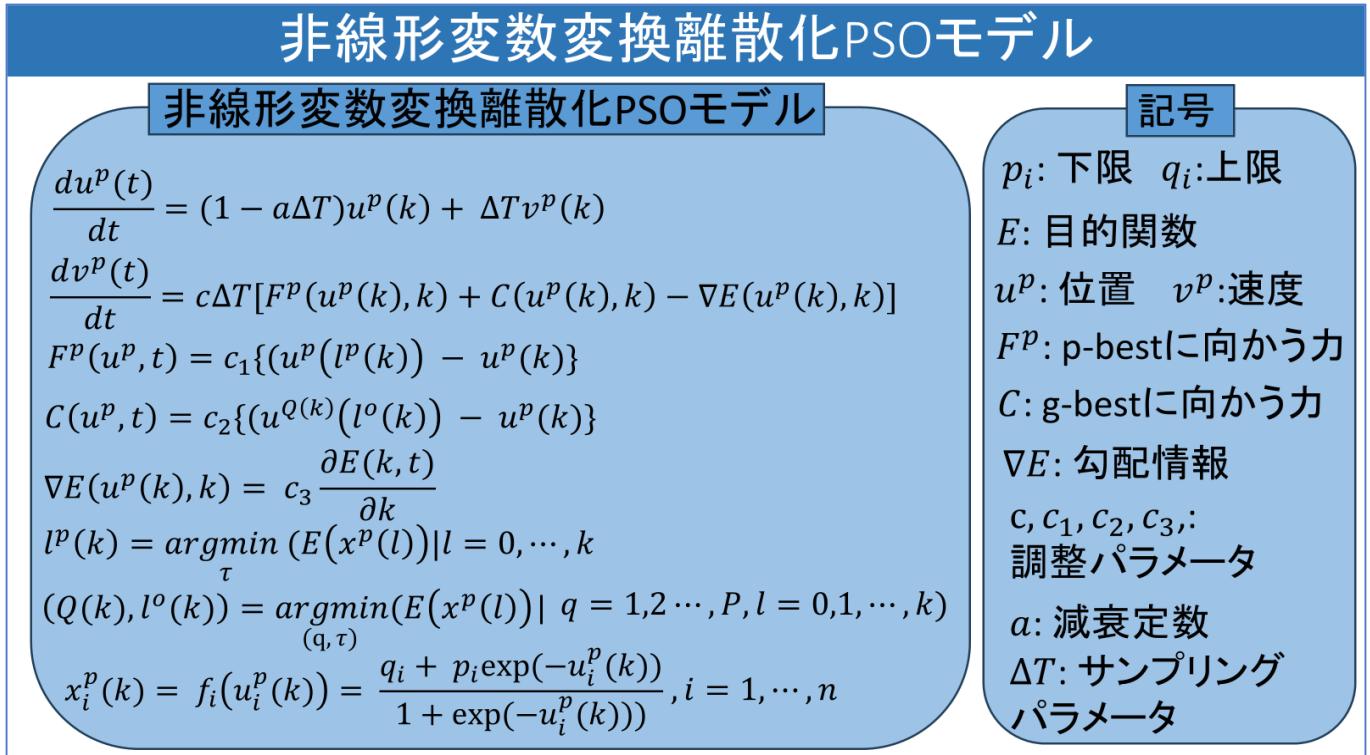


図 2 非線形変数変換モデルの離散化 PSO

§ 2.3 多目的最適化のパレート解

最適化問題とは、ある決められた制約条件を満たす範囲内で、何らかの目的を最良にするような問題のことである。一般に最適化とは、単一目的最適化を意味する。最適化問題を解く手法として PSO が知られている。しかし、実問題においては、トレードオフ関係にある複数の目的を同時に考慮し、最適化を行う問題が存在する。それを多目的最適化問題という。一般に多目的最適化問題は、「複数個のトレードオフの関係にある目的関数を与えた制約条件の元で、何らかの意味で最小化（最大化）する問題」と定義されている。ここで、これらの条件を満たす解をパレート解という。

多目的スケジューリング問題

§ 3.1 多目的スケジューリング問題とは

生産や建設などの1つの大きなプロジェクトの工程において、作業を効率よく進めるため、適切に仕事の順序を決定する問題を一般的にスケジューリング問題(日程計画問題)という。しかし、スケジューリング問題において現実には様々な評価基準があり、それら複数の目的関数を同時に考慮し、バランスあるスケジュールを求めることが現実的であることも多い。このような複数の目的関数を同時に考慮する問題を多目的スケジューリング問題といい、資金、人数、空間などといったリソースの制約を考慮した最適化が研究されている。

§ 3.2 スケジューリング問題の定式化

定式化は、最適化問題を数学的に表現するプロセスであり、問題の核心を捉え、解法を導出するための基盤を提供する。ここでは各種の多目的スケジューリング問題について、一般的な枠組みを用いてその定式化を行う。目的関数、制約条件、変数の定義を行うことで、具体的な問題設定に応じたアプローチが可能となる。以下に例を示す[5]。

§ 3.3 種々のパレート解の導出法

パレート解の導出法の中から、いくつかの手法を取り上げ、その概要を紹介する(図5参照)。具体的には、 $(\mu + \lambda)$ -ES, CMA-ES, SGA, PSO, DE, SA, NSGA-II, MOEA/Dといった代表的な手法について論じる。これらのアルゴリズムは、複雑な最適化問題を解決するための基盤を提供しており、実世界のさまざまなシナリオに適応可能である。この中でも、PSOはそのシンプルな構造と高い収束速度から注目されている。さらに、他の最適化手法(例えば、遺伝的アルゴリズムや進化戦略)と組み合わせやすく、ハイブリッド手法を構築することで、さらなる性能向上が期待できる。

これにより、局所解に陥りやすいといったデメリットの改善もしやすいため、PSOは多目的最適化の分野において非常に魅力的な選択肢となっている。

提案手法

§ 4.1 問題に対する正誤データの蓄積

§ 4.2 収集されたデータの傾向と理解度の可視化

適切なフィードバックを行うには、データの分析が必要になるため、収集されたデータの傾向と理解度の可視化が重要になる。そこで、それぞれの方法について説明する。

データの傾向を可視化する方法としては、ソートによるブロック表示法というものがある。まず、横軸を受験者、縦軸を問題とし、右から点数の高い順として並べる。正解を白色とし、不正解の場合は、それぞれの選択肢ごとに色を決め、その色とする。このままでは、全体の傾向をつかむことは困難であるため、ソートを行い、全体のデータの傾向を見やすくするというものである。』

理解度を可視化する方法としては、

§ 4.3 能力開発のための教育システムの仕組みの概要

本研究で提案するシステムの概要について説明する。初めにFlexSimを用いて、処方箋問題を提示するシステムを作る。このシステムを用いて、問題を解いてもらうことによって、正誤のデータを取得し、CSVとして蓄積する。そのデータをPythonを用いて適切に処理することによって明らかになった、回答の特徴をもとに、適切に回答者にフィードバックを行い、学習の効率化を図るというものである。

数値実験並びに考察

§ 5.1 数値実験の概要

§ 5.2 実験結果と考察

おわりに

謝辞

本研究を遂行するにあたり、多大なご指導と終始懇切丁寧なご鞭撻を賜った富山県立大学工学部電子・情報工学科情報基盤工学講座の奥原浩之教授, António Oliveira Nzinga René講師に深甚な謝意を表します。また、システム開発および数値実験にあたり、ご助力いただいた富山県立大学電子・情報工学科3年生の島部達哉氏に感謝の意を表します。最後になりましたが、多大な協力をしていただいた研究室の同輩諸氏に感謝致します。

2022年2月

長瀬 永遠

参考文献

- [1] 杉谷和哉, ”行政事業レビューにおける EBPM の実践についての考察”, 日本評価学会, Japanese journal of evaluation studies, Vol. 21, No. 1, pp. 99-111, 2021.
- [2] 中泉拓也, ”英国のEBPM (Evidence Based Policy Making) の動向と我が国へのEBPM 導入の課題”, 関東学院大学経済経営研究所年報, Vol. 41, pp. 3-9, 2019.
- [3] 井伊雅子, 五十嵐中, ”新医療の経済学：医療の費用と効果を考える”, 日本評論社, 2019.
- [4] Shohei Shimizu, Takanori Inazumi, Yasuhiro Sogawa, ”DirectLiNGAM: A Direct Method for Learning a Linear Non-Gaussian Structural Equation Model”, Journal of Machine Learning Research, Vol. 12, pp. 1225-1248, 2011.
- [5] 末吉俊幸, ”DEA-経営効率分析法”, 朝倉書店, 2001.
- [6] 国土交通省国土地理院, ”GIS とは”, 閲覧日 2022-02-08,
<https://www.gsi.go.jp/GIS/whatisgis.html>.
- [7] 佐藤主光, ”税財政分野における EBPM の基礎と活用”, 閲覧日 2022-02-08,
https://www.ipp.hit-u.ac.jp/satom/lecture/localfinance/2019_local_note07.
- [8] 内閣府, ”内閣府における EBPM への取組”, 閲覧日 2022-02-08,
<https://www.cao.go.jp/others/kichou/ebpm/ebpm.html>.
- [9] esri ジャパン, ”GIS（地理情報システム）とは”, 閲覧日 2022-02-08,
<https://www.esrij.com/getting-started/what-is-gis/>.
- [10] 国土交通省国土地理院, ”基盤地図情報の利活用事例集”, 閲覧日 2022-02-08,
<https://www.gsi.go.jp/common/000062939>.
- [11] esri ジャパン, ”東日本大震災対応における政策形成支援に GIS を活用”,
閲覧日 2022-02-08, <https://www.esrij.com/industries/case-studies/35859/>.
- [12] 田中貴宏, 佐土原聰, ”都市化ポテンシャルマップと二次草原潜在生育地マップの重ね合わせによる二次草原消失の危険性の評価：一福島県旧原町市域を対象として”, 環境情報科学論文集, Vol. 23, pp. 191-196, 2009.
- [13] 坪井利樹, 西田佳史, 持丸正明, 河内まき子, 山中龍宏, 溝口博, ”身体地図情報システム”, 日本知能情報ファジィ学会誌, Vol. 20, No. 2, pp. 155-163, 2008.
- [14] 杉原豪, 塚井誠人, ”統計的因果探索による社会基盤整備のストック効果の検証”, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 75, no.6, pp. 583-589, 2020.
- [15] Dentsu Digital Tech Blog, ”Google Colab で統計的因果探索手法 LiNGAM を動かしてみた”, 閲覧日 2022-02-08,
https://note.com/dd_techblog/n/nc8302f55c775.

- [16] 藤井秀幸, 傅靖, 小林里佳子, ”データ包絡分析を用いたふるさと納税の戦略提案-K市のふるさと納税への適用事例-”, 日本経営工学会論文誌, Vol. 71, No. 4, pp. 149-172, 2021.
- [17] 刀根薰, ”包絡分析法 DEA”, 日本ファジィ学会誌, Vol. 8, No. 1, pp. 11-14, 1996.
- [18] 金成賢作, 篠原正明, ”DEA における入力指向と出力指向の比較（その 1）”, 日本大学生産工学部第 42 回学術講演会, 2009.
- [19] 日本オペレーション・リサーチ, ”第 4 章 包絡分析-入力と出力と”, 閲覧日 2022-02-08,
<http://www2.econ.tohoku.ac.jp/ksuzuki/teaching/2006/ch4>.
- [20] pork_steak, ”folium 事始め”, 閲覧日 2022-02-08,
https://qiita.com/pork_steak/items/f551fa09794831100faa.
- [21] 保母敏行ほか, ”日本分析学会における標準物質の開発”, 日本分析化学会誌, vol. 57, No. 6, pp. 363-392, 2008.
- [22] 射水市役所, ”総合戦略-射水市”, 閲覧日 2022-02-08,
<https://www.city.imizu.toyama.jp/appupload/EDIT/054/054185>.
- [23] 射水市役所, ”共通課題-射水市”, 閲覧日 2022-02-08,
<https://www.city.imizu.toyama.jp/appupload/EDIT/024/024383>.

